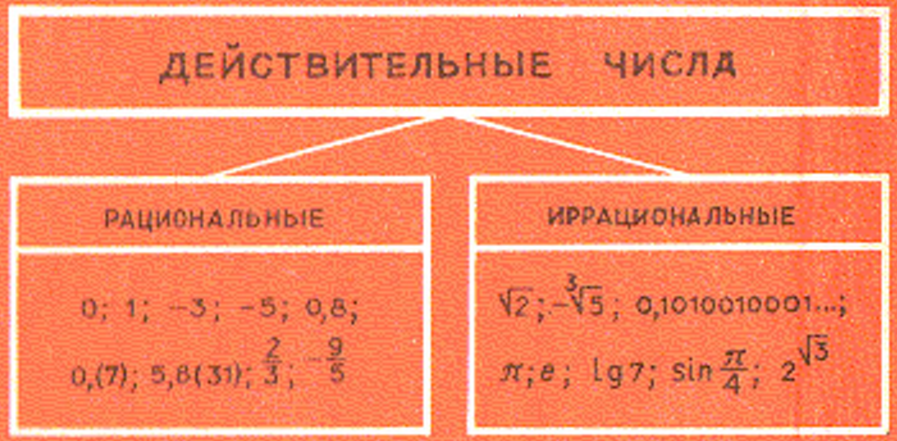
АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

ДЛЯ
ВЕЧЕРНЕЙ
(СМЕННОЙ)
ШКОЛЫ

9-11



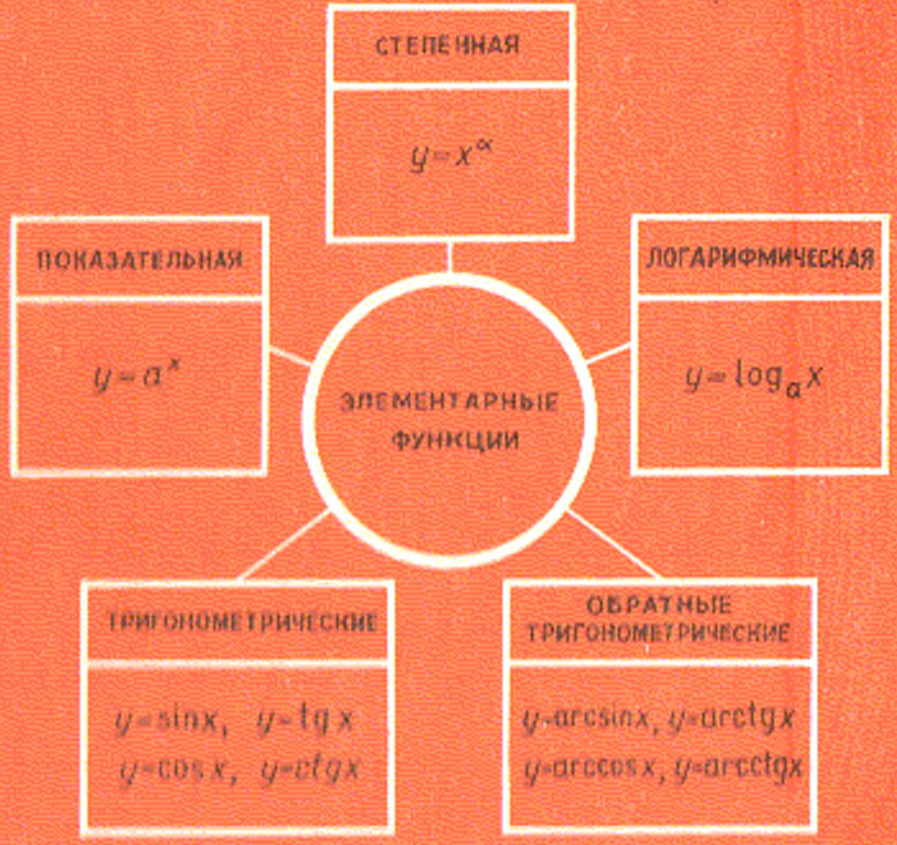
ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

РАЦИОНАЛЬНЫЕ

$0;\ 1;\ -3;\ -5;\ 0{,}8;\ 0{,}(7);\ 5{,}8(31);\ \frac{2}{3};\ -\frac{9}{5}$

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ

$\sqrt{2};\ -\sqrt[3]{5};\ 0{,}1010010001\ldots;\ \pi;\ e;\ \lg 7;\ \sin\frac{\pi}{4};\ 2^{\sqrt{3}}$



ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

СТЕПЕННАЯ

$y=x^{\alpha}$

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ

$y=a^{x}$

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ

$y=\log_a x$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ

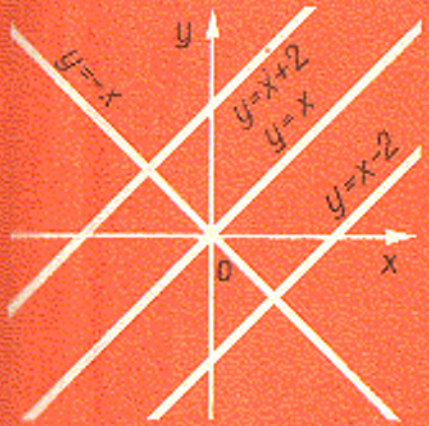
$y=\sin x,\ y=\operatorname{tg} x$

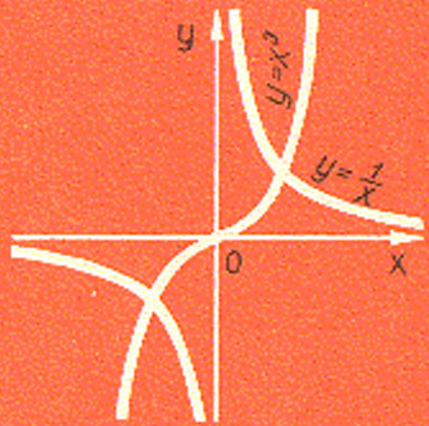
$y=\cos x,\ y=\operatorname{ctg} x$

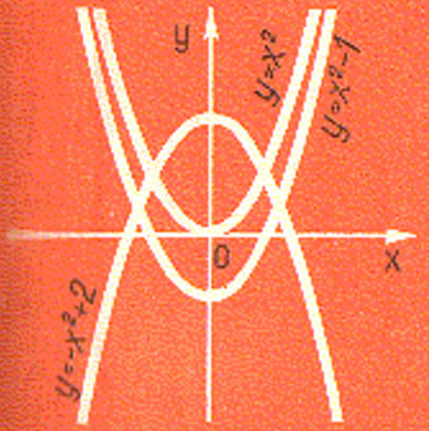
ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ

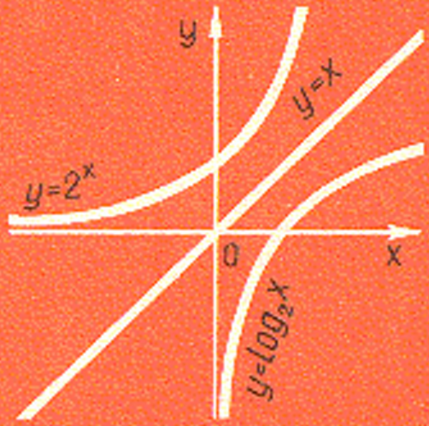
$y=\arcsin x,\ y=\operatorname{arctg} x$

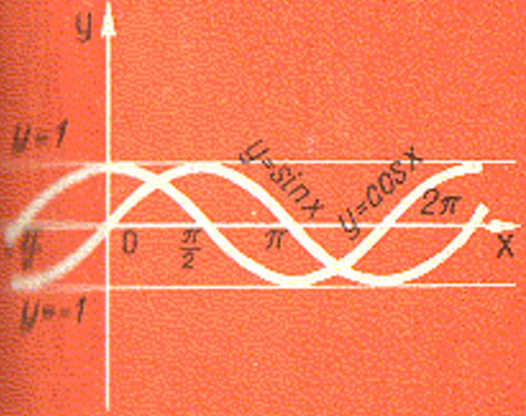
$y=\arccos x,\ y=\operatorname{arcctg} x$

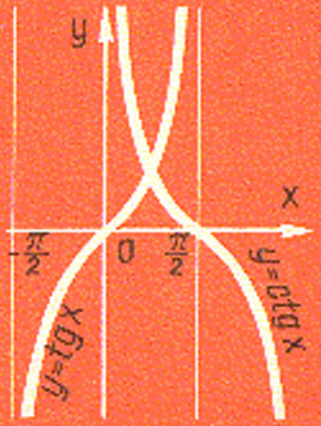












АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ 9—11 КЛАССОВ
ВЕЧЕРНЕЙ (СМЕННОЙ)
ШКОЛЫ

●

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Г. Д. ГЛЕЙЗЕРА

Допущено
Министерством просвещения СССР

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1986

ББК 22.14я721
А45

Г. Д. ГЛЕЙЗЕР, С. М. СААКЯН,
И. Г. ВЯЛЬЦЕВА, А. С. АЛЕКСЕЕВ

Алгебра и начала анализа: Учеб. пособие для 9—11 кл.
А45 веч. (смен.) шк. / Г. Д. Глейзер, С. М. Саакян, И. Г. Вяльцева,
А. С. Алексеев; Под ред. Г. Д. Глейзера.— 4-е изд.—М.:
Просвещение, 1986.— 415 с.: ил.

А $\frac{4306020400-229}{103\,(03)-86}$ инф. письмо — 86 ББК 22.14я721

© Издательство «Просвещение», 1983

Глава I.

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Число является важнейшим математическим понятием. Это понятие возникло еще в первобытном обществе. Натуральные числа появились в связи с потребностью счета предметов. Постепенно люди осознали бесконечность множества натуральных чисел. Сейчас в математике множество натуральных чисел вводится аксиоматически. Множество натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, ... будем обозначать буквой $\boldsymbol{N}$. На этом множестве определяются две операции: сложение и умножение. Натуральные числа можно складывать, причем сумма двух натуральных чисел есть число натуральное, поэтому говорят, что операция сложения на множестве $\boldsymbol{N}$ выполнима. Натуральные числа можно перемножать. Произведение двух натуральных чисел — натуральное число.

Операции сложения и умножения натуральных чисел обладают следующими свойствами:

1) $a+b=b+a$ — переместительный закон сложения;
2) $a+(b+c)=(a+b)+c$ — сочетательный закон сложения;
3) $a\cdot b=b\cdot a$ — переместительный закон умножения;
4) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ — сочетательный закон умножения;
5) $a\cdot(b+c)=ab+ac$ — распределительный закон умножения относительно сложения.

В множестве натуральных чисел существует также единица, такое число 1, что $a\cdot 1=1\cdot a=a$.

В основе всех вычислений на множестве натуральных чисел лежат приведенные выше законы.

Первым расширением понятия натурального числа явилось присоединение к множеству натуральных чисел дробных чисел. Возникновение дробных чисел было вызвано необходимостью измерять величины. Измерение какой-нибудь величины заключается в сравнении ее с другой качественно однородной с ней величиной, принимаемой за единицу. Например, при измерении длины данного отрезка на нем откладывают последовательно другой отрезок, принятый за единицу длины (1 см, 1 м и т. д.). Так с помощью операции «откладывания» единицы измерения и счета производят измерение длины. Ясно, что не всегда единичный отрезок уложится на измеряемом отрезке целое число раз. Поэтому возникает необходимость рассматривать дроби — половину, треть, четверть и другие доли единицы измерения.

С развитием арифметики — науки о числах и операциях над ними — люди стали рассматривать дробные числа (или дроби) с любыми натуральными знаменателями и дробное число представлять как частное от деления двух натуральных чисел, из которых делимое нацело не делится на делитель. Вообще же обыкновенной дробью называют число вида $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называются равными, если $a \cdot d = b \cdot c$. Пользуясь этим определением, нетрудно доказать, что дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{a \cdot n}{b \cdot n}$ также равны. Отсюда следует основное свойство дроби: если числитель и знаменатель дроби умножить (или разделить) на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$. По основному свойству дроби одно и то же дробное число можно представить по-разному равными обыкновенными дробями, например $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{20}{30} = \ldots$.

Дальнейшее расширение понятия о числе было вызвано потребностями самой математики. В связи с решением линейных уравнений с одной переменной стало необходимым введение отрицательных чисел. В конкретных задачах отрицательный ответ истолковывается как значение направленной величины (положительные и отрицательные температуры, передвижение в направлении, противоположном выбранному, прибыль — долг и т. п.).

Особенно отчетливо проявился смысл понятия отрицательного числа с введением координатной прямой и координатной плоскости. Важным моментом в математике явилось введение числа нуль.

Множество целых чисел (положительных, нуля и отрицательных) будем обозначать буквой $\boldsymbol{Z}$:

$$\boldsymbol{Z} = \{\ldots, -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots\}.$$

Объединение множества целых и множества дробных чисел называют множеством рациональных чисел. Множество рациональных чисел обозначают буквой $\boldsymbol{Q}$. Латинское слово ratio означает отношение.

Всякое рациональное число можно представить в виде дроби $\frac{p}{q}$, где p и q — целые числа (как положительные, так и отрицательные), причем $q \neq 0$.

На множестве рациональных чисел определены операции сложения, умножения, вычитания и деления (кроме деления на нуль, которое не имеет смысла). Это означает, что результат выполнения названных операций над двумя рациональными числами есть опять число рациональное. Указанные операции обладают следующими свойствами:

1) $a + b = b + a$ — переместительный закон сложения;
2) $a + (b + c) = (a + b) + c$ — сочетательный закон сложения;
3) $a + 0 = a$ — существует число нуль (0);
4) $a + (-a) = 0$ — сумма противоположных чисел равна нулю;
5) $a \cdot b = b \cdot a$ — переместительный закон умножения;
6) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ — сочетательный закон умножения;
7) $a \cdot (b + c) = ab + ac$ — распределительный закон умножения относительно сложения;
8) $a \cdot 1 = a$ — существует число единица (1);
9) $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, где $a \neq 0$ — произведение двух взаимно обратных чисел равно 1;
10) $a \cdot 0 = 0$ — произведение любого числа на нуль равно нулю.

В основе всех вычислений на множестве рациональных чисел лежат названные выше законы.

Множество рациональных чисел упорядочено относительно понятий «больше» и «меньше». Подчеркнем еще одно свойство рациональных чисел: между любыми двумя различными рациональными числами находится бесконечно много рациональных чисел. Это свойство называют свойством плотности рациональных чисел. Действительно, если a и b — различные рациональные числа и $a < b$, то рациональное число $\frac{a+b}{2}$ находится между ними: $a < \frac{a+b}{2} < b$. Поступая аналогично и далее, можно доказать, что между a и b бесконечно много рациональных чисел.

Каждому рациональному числу соответствует единственная точка координатной прямой, причем двум различным рациональным числам соответствуют различные точки координатной прямой. Обратное же утверждение неверно. Другими словами, несмотря на то что рациональные числа обладают свойством плотности, они все же не «заполняют» всю координатную прямую, т. е. существуют точки прямой, которым не соответствуют никакие рациональные числа.

Особо важную роль в математике и в практических расчетах играют десятичные дроби. Если разложение знаменателя обыкновенной дроби на простые множители состоит только из двоек и пятерок, то такую дробь можно записать в виде конечной десятичной дроби. Например, $\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{6}{10}=0{,}6$; $\frac{7}{20}=\frac{7}{2\cdot 2\cdot 5}=\frac{7\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 5\cdot 5}=\frac{35}{100}=0{,}35$.

Если же данная обыкновенная дробь несократима и разложение ее знаменателя на простые множители содержит числа, отличные от двух и пяти, то такую дробь можно записать в виде бесконечной периодической десятичной дроби, т. е. такой десятичной дроби, у которой число десятичных знаков бесконечно и одна или несколько цифр после запятой последовательно повторяются.

Представим, например, обыкновенную дробь $\frac{2}{3}$ в виде десятичной дроби. Будем делить число 2 на число 3, получим 0,66666... . Эту бесконечную десятичную дробь называют периодической; цифру 6 называют периодом этой дроби. Для краткости записи периодических дробей период записывают только один раз, заключая его в круглые скобки. Например, $\frac{2}{3}=0{,}66666...=0{,}(6)$ (читают: «нуль целых и шесть в периоде»). Период у дроби может начинаться не сразу после запятой и содержать не одну, а несколько цифр. Например, $2\frac{16}{45}=2{,}3(5)$; $\frac{5}{11}=0{,}(45)$.

Условились десятичные дроби с периодом 9 заменять дробями с периодом 0, т. е. конечными десятичными дробями. Например, $2{,}45(9)=2{,}46(0)=2{,}46$. Поэтому десятичные дроби с периодом 9 мы в дальнейшем рассматривать не будем. Ниже в курсе мы подробнее ознакомимся с десятичными периодическими дробями. Сейчас важно запомнить следующее:

1) любое рациональное число представимо в виде бесконечной периодической десятичной дроби;

2) любую десятичную периодическую дробь можно представить в виде обыкновенной дроби, т. е. любая десятичная периодическая дробь есть число рациональное.

Позднее будет показано, как это можно сделать. Сейчас обращением обыкновенной дроби в периодическую проверьте правильность таких преобразований:

$$0{,}(24)=\frac{24}{99}=\frac{8}{33};\quad 3{,}(8)=3\frac{8}{9};\quad 4{,}(521)=4\frac{521}{999};$$

$$0{,}5(72)=\frac{572-5}{990}=\frac{567}{990}=\frac{63}{110};\quad 2{,}51(3)=2\,\frac{513-51}{900}=2\,\frac{462}{900}=2\frac{77}{150}.$$

Сформулируем без доказательства правило обращения десятичной периодической дроби в обыкновенную: дробная часть периодической дроби равна такой обыкновенной дроби, у которой числитель есть число, стоящее между запятой и вторым периодом, минус число, стоящее между запятой и первым периодом, а знаменатель — число, состоящее последовательно из стольких цифр 9, сколько цифр в периоде, и стольких нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Например, $0{,}2(31)=\frac{231-2}{990}=\frac{229}{990}$;

$3{,}75(6)=3\,\frac{756-75}{900}=3\,\frac{681}{900}$.

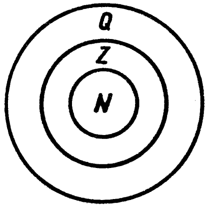
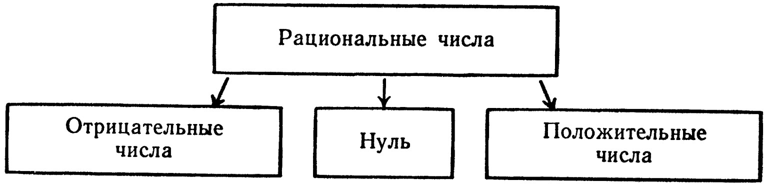


Рис. 1

Это правило заучивать не следует, им можно пользоваться как справочным.

В заключение на рисунке 1 в виде кругов приведено соотношение между числовыми множествами: $N\subset Z\subset Q$.

Классификацию множества рациональных чисел можно провести по расположению их на числовой прямой относительно нуля. Такая классификация будет выглядеть так:



Упражнения

1. Составьте тезисы изученного параграфа.

2. Приведите примеры чисел: а) натуральных, б) целых, в) рациональных. Какие числа называют рациональными?

3. Разрешимо ли уравнение $a+x=b$, где a и b — числа, x — переменная, на множестве: а) натуральных чисел; б) целых чисел; в) рациональных чисел?

4. Разрешимо ли уравнение $ax=b$, где a и b — числа, x — переменная ($a\neq 0$), на множестве: а) натуральных чисел; б) целых чисел; в) рациональных чисел?

5. Представьте дроби в виде десятичных: а) $\frac{17}{20}$; б) $-\frac{8}{25}$; в) $\frac{26}{11}$; г) $5\frac{9}{20}$.

6. Представьте дроби в виде обыкновенных дробей: а) 0,(3); б) 0,2(5); в) −7,(36); г) 7,2(25).

7. Найдите значения выражений:

а) $0{,}(3)+\frac{1}{3}$;

б) $(2{,}(1)+3{,}(12)):0{,}5$;

в) $13{,}7 \cdot 0{,}1 + \left(16\frac{22}{45} \cdot 0{,}5 - 1\frac{61}{72} \cdot 2\right) + 19{,}89 : \left(4{,}75 + \frac{23}{80} : 2{,}3\right)$;

г) $\left(5\frac{17}{30} - 1\frac{41}{96} \cdot 2\right) : 3\frac{7}{8} + 0{,}4 \cdot \left(15{,}25 : \frac{1}{2} - 988 : 32{,}5\right) + 4{,}15 \cdot 0{,}4$.

8. Какие операции определены на множестве: а) натуральных чисел, б) целых чисел, в) рациональных чисел?

9. Сформулируйте известные вам свойства операций, выполнимых на множестве рациональных чисел.

10. Расскажите о классификации рациональных чисел.

11. Покажите, что между числами $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{5}$ существуют рациональные числа. Назовите три таких числа.

§ 2. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Процесс измерения привел к представлениям не только о дробных числах, но и к представлениям о новых числах, отличных от рациональных. Рассмотрим процесс измерения отрезка AB (рис. 2). Для нахождения длины этого отрезка необходимо выбрать другой отрезок в качестве единицы длины. За единицу длины примем сторону квадрата, для которого отрезок AB является диагональю. Будем теперь измерять отрезок AB отрезком AC ($|AC| = 1$).

Измерение 1. Отложим отрезок AC на отрезке AB от точки A. На отрезке AB отрезок AC уложится только один раз: $|AK| = |AC|$. На отрезке KB единица измерения (отрезок AC) больше не уложится. Поэтому при точности измерения, равной 1, длина отрезка AB равна либо 1 (с недостатком), либо 2 (с избытком).

Измерение 2. Увеличим точность измерения. В качестве единицы измерения возьмем 0,1 часть отрезка AC. Отложим эту новую единицу на отрезке KB. Нетрудно заметить, что на отрезке KB уложится четыре новые единицы измерения; при этом в качестве остатка останется отрезок MB, длина которого меньше $0{,}1|AC|$. Поэтому длина отрезка AB равна либо 1,4 (с недостатком), либо 1,5 (с избытком) при точности измерения 0,1.

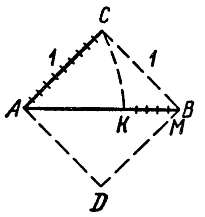


Рис. 2

Измерение 3. В нашем случае процесс измерения не окончен, поэтому продолжим его, увеличив точность измерения. В качестве единицы измерения возьмем 0,01 часть отрезка AC и будем откладывать эту единицу измерения на отрезке MB. При достаточно аккуратном выполнении измерений можно заметить, что на отрезке MB уложится только один отрезок длиной $0{,}01|AC|$ и останется остаток, длина которого меньше $0{,}01|AC|$. Поэтому длина отрезка AB равна либо 1,41 (с недостатком), либо 1,42 (с избытком) при точности измерения 0,01.

Аналогично выполним измерение 4, выбрав в качестве единицы измерения 0,001 часть отрезка AC. Достаточно точные измерения дадут результат: $|AB| \approx 1{,}414$ (с недостатком) или $|AB| \approx 1{,}415$ (с избытком) при точности измерения 0,001.

Результаты измерения занесем в таблицу:

№ измерения	Точность измерения	Длина отрезка AB (при единице измерения $\|AC\|$)	
		с недостатком	с избытком
1	1	1	2
2	0,1	1,4	1,5
3	0,01	1,41	1,42
4	0,001	1,414	1,415

Практически процесс измерения прервется, какими бы точными инструментами мы ни пользовались. Однако теоретически можно предположить, что этот процесс будет бесконечным и с увеличением точности измерений мы будем получать все новые и новые десятичные знаки значения длины отрезка AB.

Таким образом, теоретически можно предположить возможность следующих трех случаев: 1) длина отрезка AB будет выражаться конечной десятичной дробью (если процесс измерения прервется); 2) длина отрезка AB будет выражаться периодической бесконечной десятичной дробью; 3) длина отрезка AB будет выражаться непериодической бесконечной десятичной дробью. В первых двух случаях длина отрезка выражается рациональным числом, так как конечная десятичная и бесконечная десятичная периодическая дроби есть числа рациональные (см. § 1). В третьем случае (если он возможен) длина отрезка выражается бесконечной десятичной непериодической дробью. Но с такими числами мы до сих пор не встречались. Существуют ли они? Пример числа $a = 0{,}101001000100001\ldots$ показывает существование бесконечных десятичных непериодических дробей (в записи число нулей, следующих за единицей, каждый раз увеличивается). По этому же принципу можно построить и другие числа: 2,7171171117...; 0,8383383338... .

Докажем, что длина отрезка AB также выражается бесконечной десятичной непериодической дробью, если единицей измерения служит отрезок AC. Пользуясь теоремой Пифагора, из $\triangle ACB$ найдем квадрат длины отрезка AB: $|AB|^2 = 2$. Докажем теперь, что среди рациональных чисел нет такого числа, квадрат которого равен 2.

Теорема. ***Не существует рационального числа, квадрат которого равен 2.***

Доказательство. Прежде чем доказывать теорему, заметим, что если квадрат некоторого числа — четное число, то и само это число четное (докажите самостоятельно). Доказательство теоремы проведем методом от противного. Предположим, что существует рациональное число, квадрат которого равен 2. Тогда это число может быть представлено в виде обыкновенной несократимой дроби $\frac{p}{q}$, где $p, q \in N$ и числа p и q взаимно простые.

Предположим, что $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$. Из предположения следует, что

$$2=\frac{p^2}{q^2},\quad 2q^2=p^2.$$

Так как $2q^2$ — четное число, то и p^2 — четное число, поэтому и p — четное число. Если p — четное число, то его можно представить в виде $p=2n$, где $n \in N$. Это значение p подставим в равенство $2q^2=p^2$, получим: $2q^2=(2n)^2$, $2q^2=4n^2$, $q^2=2n^2$. Последнее равенство означает, что q — число четное. Получили противоречие: мы предполагали, что дробь $\frac{p}{q}$ несократима, а пришли к тому, что ее числитель и знаменатель — четные числа. Следовательно, наше предположение о том, что $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$, ложно. Это означает, что среди рациональных чисел нет такого, квадрат которого равен 2.

Возвращаясь к задаче измерения отрезка AB, мы можем заключить, что наше теоретическое предположение оправдалось: если в качестве единицы измерения выбрать сторону квадрата, то длина его диагонали не выражается рациональным числом, а выражается бесконечной десятичной непериодической дробью: $|AB|=\sqrt{2}=1{,}4142135\ldots$.

Определение. **Число, которое может быть представлено в виде бесконечной десятичной непериодической дроби, называется иррациональным числом.**

Выше было показано, как можно конструировать иррациональные числа (например, 0,5050050005...). Было также доказано, что $\sqrt{2}$ — число иррациональное. Аналогично можно доказать, что корень квадратный из любого натурального числа, не являющегося точным квадратом, есть число иррациональное. Поэтому $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$ и т. п.— иррациональные числа. Примером иррационального числа служит и число $\pi=3{,}1415926535\ldots$, выражающее отношение длины окружности к своему диаметру (доказательство иррациональности числа π довольно сложное). Таким образом, если за единицу измерения принять диаметр окружности, то ее длина будет выражаться иррациональным числом.

Пример. **Докажем, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 5.**

Решение. Предположим, что существует несократимая дробь $\frac{p}{q}$ такая, что $5=\left(\frac{p}{q}\right)^2$, где $p, q \in N$ и p и q — числа взаимно простые, тогда $5=\frac{p^2}{q^2}$, $5q^2=p^2$. Так как p^2 делится на 5, то и p делится на 5, значит, $p=5n$, где $n \in N$. Подставив это значение p в равенство $5q^2=p^2$, получим: $5q^2=(5n)^2$, $5q^2=25n^2$, $q^2=5n^2$. Из последнего равенства получаем, что q^2 делится на 5, а потому и q делится на 5.

Получили: p делится на 5 и q делится на 5, следовательно дробь $\frac{p}{q}$ сократима, что противоречит нашему предположению. Значит, предположение о том, что $\left(\frac{p}{q}\right)^2=5$ ложно. Это означает, что среди рациональных чисел нет такого, квадрат которого равен 5.

Теперь нам стали ясны причины введения иррациональных чисел. Одна из этих причин заключается в том, что рациональных чисел недостаточно для измерения длин отрезков. Например, выше было показано, что длина диагонали квадрата не выражается рациональным числом, если за единицу измерения принять сторону этого квадрата. Другая причина введения иррациональных чисел заключается в том, что на множестве рациональных чисел многие алгебраические уравнения с рациональными (в том числе и целыми) коэффициентами не имеют решений. Например, уравнения $x^2=2$, $x^2=3$, $x^2=5$, $x^2=6$ и т. п. на множестве рациональных чисел решений не имеют, ведь числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, как мы теперь знаем, иррациональные.

При изучении курса мы часто будем встречаться с иррациональными числами (значения корней уравнений, значения тригонометрических, логарифмических и других функций).

Иррациональные числа могут быть как положительными, так и отрицательными.

Упражнения

1. Составьте конспект параграфа.
2. Сформулируйте определение иррационального числа.
3. Какие из приведенных ниже чисел рациональные, а какие иррациональные: $\frac{7}{41}$; 7; $\sqrt{7}$; 0; $-\sqrt{2}$; 4; 0,(8); 5,7(3); 2,13113111311113... (число единиц после каждой тройки увеличивается)?
4. Приведите примеры положительных и отрицательных иррациональных чисел.
5. Докажите, что среди рациональных чисел нет такого числа, квадрат которого равен 3.
6. Докажите, что среди рациональных чисел нет такого числа, квадрат которого равен 8.

7. В качестве единицы измерения возьмите произвольный отрезок. Постройте отрезок, длина которого выражается: а) рациональным числом; б) иррациональным числом.

8. Даны два отрезка $|AB|=2$ см и $|CD|=3$ см. Приняв отрезок CD за новую единицу измерения, найдите длину отрезка AB. Каким числом выражается искомая длина?

§ 3. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Объединение множества $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел и множества иррациональных чисел называют множеством действительных чисел. Множество действительных чисел обозначают буквой $\boldsymbol{R}$.

Между множеством действительных чисел и множеством бесконечных десятичных дробей существует взаимно однозначное соответствие. Действительно, каждая бесконечная периодическая десятичная дробь является представлением некоторого рационального числа (напоминаем, что мы исключаем из рассмотрения периодические дроби с периодом 9). Каждая бесконечная непериодическая десятичная дробь является представлением некоторого иррационального числа. Таким образом, каждая бесконечная десятичная дробь является представлением некоторого действительного числа. С другой стороны, каждому действительному числу соответствует единственная бесконечная десятичная дробь: рациональному числу — периодическая десятичная дробь или конечная, которую можно представить в виде бесконечной десятичной дроби с периодом 0; иррациональному числу — бесконечная непериодическая десятичная дробь. Поэтому действительное число можно определить как число, которое может быть выражено бесконечной десятичной дробью.

Теперь становится понятным, что действительных чисел достаточно для измерения длин отрезков. В самом деле, в § 2 было показано, что длина может быть выражена либо рациональным, либо иррациональным числом, т. е. бесконечной десятичной дробью. А каждая бесконечная десятичная дробь есть некоторое действительное число. Примем без доказательства утверждение: каждой точке координатной прямой соответствует определенное действительное (рациональное или иррациональное) число. Справедливо и обратное утверждение: всякое действительное число определяет одну и только одну точку координатной прямой.

Это соответствие устанавливается так:

а) если точка A принадлежит положительному лучу, то за ее координату x принимают длину отрезка OA;

б) если точка A принадлежит отрицательному лучу, то за x принимают отрицательное число, модуль которого равен длине отрезка OA;

в) если точка A совпадает с началом отсчета — точкой O, то $x=0$.

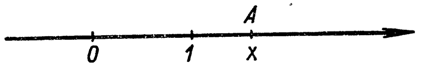


Рис. 3

При этих условиях каждой точке A координатной прямой соответствует некоторое число x, называемое координатой точки A (рис. 3). Запись $A(x)$ означает, что точка A имеет координату x.

Таким образом, между множеством действительных чисел и множеством точек координатной прямой установлено взаимно однозначное соответствие. Как известно (см. § 1), точки, соответствующие рациональным числам, не заполняют всей координатной прямой. На прямой имеются точки, которым не соответствуют никакие рациональные числа. Каждой такой точке соответствует некоторое иррациональное число. С введением действительных чисел координатная прямая стала непрерывной.

На рисунке 4 показано, как на координатной прямой можно построить точки, соответствующие некоторым иррациональным числам — квадратным корням из натуральных чисел, не являющихся точными квадратами. Способ построения разберите самостоятельно ($OABB_1$ — квадрат; из $\triangle OBB_1$ находим $|OB|=\sqrt{2}$, $|OC_1|=|OB|$; точке C_1 координатной прямой соответствует число $\sqrt{2}$).

Множество действительных чисел, как и множество рациональных чисел, упорядочено относительно понятий «больше» и «меньше». Покажем, как сравнивают действительные числа. Для каждого действительного числа можно указать два рациональных числа, между которыми оно заключено. Причем эти рациональные числа могут отличаться друг от друга сколь угодно мало, на 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 и т. д. Такие рациональные числа называются десятичными приближениями данного действительного числа по недостатку и по избытку с указанной точностью.

Например, в предыдущем параграфе при измерении диагонали квадрата с помощью его стороны, принятой за единицу, нами были получены десятичные приближения действительного числа $\sqrt{2}$:

$$1<\sqrt{2}<2 \quad \text{(с точностью до 1)},$$

$$1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5 \quad \text{(с точностью до 0,1)},$$

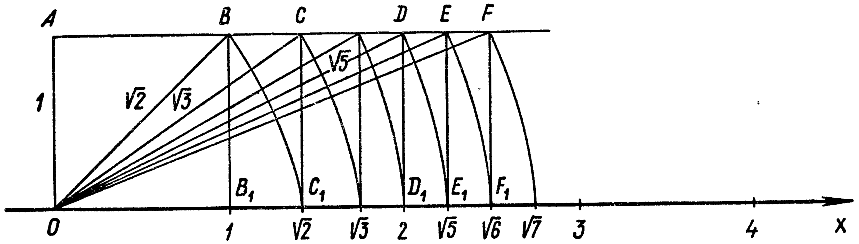


Рис. 4

$$\begin{array}{ll} 1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42 & (\text{с точностью до } 0{,}01), \\ 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415 & (\text{с точностью до } 0{,}001), \end{array}$$

. . . .

Пользуясь таблицей квадратных корней, запишем десятичные приближения действительного числа $\sqrt{3}$:

$$\begin{array}{ll} 1 < \sqrt{3} < 2 & (\text{с точностью до } 1), \\ 1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8 & (\text{с точностью до } 0{,}1), \\ 1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74 & (\text{с точностью до } 0{,}01), \\ 1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733 & (\text{с точностью до } 0{,}001), \end{array}$$

. . . .

При сравнении двух действительных чисел α и β будем считать число α меньше β ($\alpha < \beta$), а число β больше α ($\beta > \alpha$), если какое-нибудь приближенное значение числа α с недостатком меньше соответствующего приближенного значения числа β с недостатком (слово «соответствующего» означает «взятого с той же точностью»). Например, при точности 0,1 приближенное значение числа $\sqrt{2}$ с недостатком равно 1,4; приближенное значение числа $\sqrt{3}$ с недостатком при той же точности равно 1,7. Так как $1{,}4 < 1{,}7$, то $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ или $\sqrt{3} > \sqrt{2}$.

Задание 1. Сравните числа: а) 3,14159265... и 3,141141114...; б) 0,(6) и 0,6767767776....

Над действительными числами выполняются такие же арифметические операции, что и над рациональными числами (сложение, вычитание, умножение и деление). Ранее эти операции определялись только применительно к рациональным числам. С помощью специальных определений можно установить их смысл для произвольных действительных чисел (бесконечных десятичных дробей). При введении таких операций заботятся о том, чтобы они не противоречили уже введенным определениям таких же операций для рациональных чисел (периодических дробей) и вместе с тем обладали теми же свойствами. Рассмотрим, как определяются лишь две операции — сложение и умножение действительных чисел. Пусть даны два действительных числа x и y, а также их десятичные приближения по недостатку x_n и y_n и по избытку x'_n и y'_n с точностью до 10^{-n}. Тогда верны неравенства: $x_n \leqslant x < x'_n$, $y_n \leqslant y < y'_n$.

Определение 1. **Суммой двух действительных чисел называется такое действительное число, которое не меньше суммы любых десятичных приближений этих чисел по недостатку, но меньше суммы соответствующих их десятичных приближений по избытку при любой точности.**

По определению $x + y = z$, если $x_n + y_n \leqslant z < x'_n + y'_n$ при точности 10^{-n}, $n \in \boldsymbol{N}$.

Определение 2. **Произведением двух неотрицательных действительных чисел называется такое действительное число, которое не меньше произведения любых десятичных приближений этих чисел по недостатку, но меньше произведения соответствующих их десятичных приближений по избытку при любой точности.**

По определению $x \cdot y = z$, если $x_n \cdot y_n \leqslant z < x'_n \cdot y'_n$ при точности 10^{-n}, $n \in \boldsymbol{N}$.

Можно доказать, что для любых действительных чисел x и y их сумма и произведение существуют, и притом единственны. Мы примем это утверждение без доказательства.

Пример. Даны действительные числа $x = 1{,}2121121112...$ и $y = 3{,}616616661...$. Найдем два десятичных знака суммы этих чисел и три значащие цифры их произведения.

Напомним, что десятичными знаками числа называют все его цифры, стоящие справа от запятой, а значащими цифрами числа — все его цифры, кроме нулей, стоящих слева (например, у числа 0,05081 пять десятичных знаков и четыре значащие цифры).

Найдем десятичные приближения чисел x и y с точностью до 1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}:

$$\begin{array}{lll} 1 < x < 2; & 3 < y < 4 & (\text{с точностью до } 1); \\ 1{,}2 < x < 1{,}3; & 3{,}6 < y < 3{,}7 & (\text{с точностью до } 10^{-1}); \\ 1{,}21 < x < 1{,}22; & 3{,}61 < y < 3{,}62 & (\text{с точностью до } 10^{-2}); \\ 1{,}212 < x < 1{,}213; & 3{,}616 < y < 3{,}617 & (\text{с точностью до } 10^{-3}). \end{array}$$

Найдем теперь соответствующие десятичные приближения суммы $x + y$ и произведения $x \cdot y$:

$$\begin{array}{ll} 4 < x + y < 6; & 3 < xy < 8; \\ 4{,}8 < x + y < 5{,}0; & 4{,}32 < xy < 4{,}81; \\ 4{,}82 < x + y < 4{,}84; & 4{,}3681 < xy < 4{,}4164; \\ 4{,}828 < x + y < 4{,}830; & 4{,}382592 < xy < 4{,}387421. \end{array}$$

Получим, что $x + y = 4{,}82...$; $xy = 4{,}38...$.

Для произвольных действительных чисел x и y считают, что $x \cdot y = |x| \cdot |y|$, если данные числа одинакового знака, и $x \cdot y = -|x| \cdot |y|$, если они разных знаков.

Операции вычитания и деления действительных чисел определяются как операции, соответственно обратные операциям сложения и умножения.

В заключение на рисунке 5 в виде кругов приведено соотношение между числовыми множествами: $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$.

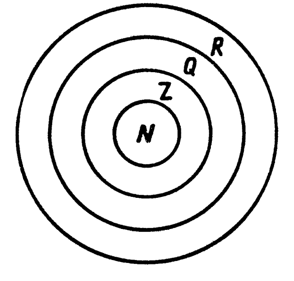


Рис. 5

Упражнения

1. Составьте тезисы параграфа.
2. Найдите десятичные приближения по недостатку и по избытку с точностью

до 10^{-2} следующих чисел: а) 3,2153; б) $\frac{2}{3}$; в) $\sqrt{7}$; г) 7,858858885...; д) −2,156.

3. Как сравнивают два действительных числа?

4. Сформулируйте определение суммы и произведения двух действительных чисел.

5. Постройте на координатной прямой точки, соответствующие числам: а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}$; г) $-\sqrt{7}$; д) $-\sqrt{3}$.

6. Найдите два десятичных знака суммы и три значащие цифры произведения чисел: а) $x=3{,}5151151115...$ и $y=0{,}4343343334...$; б) $x=2{,}36$; $y=1{,}020020002...$.

7. Найдите два десятичных знака суммы и три значащие цифры произведения чисел $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$.

8. Докажите, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ иррациональное.

Указание. Предположите, что эта сумма есть число рациональное. Обозначьте его. Возведите в квадрат обе части равенства и найдите из него $\sqrt{6}$. Получите ложное утверждение о том, что $\sqrt{6}$ — рациональное число.

9*[1]. Может ли: а) сумма двух рациональных чисел быть числом иррациональным; б) сумма рационального и иррационального чисел быть числом рациональным; в) сумма двух иррациональных чисел быть числом рациональным?

§ 4. НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ПРОМЕЖУТКИ

Так как между множеством действительных чисел и множеством точек координатной прямой установлено взаимно однозначное соответствие, то о действительных числах можно говорить как о точках координатной прямой.

Рассмотрим два числа x_1 и x_2 и соответствующие им точки координатной прямой $A(x_1)$ и $B(x_2)$ (рис. 6). Число $|x_2-x_1|$ выражает расстояние от A до B: $|AB|=|x_2-x_1|$.

Задание. Найдите расстояние между точками: а) $A(-2)$ и $B(4)$; б) $C(3)$ и $D(0)$; в) $M(-8)$ и $N(-1)$; г) $K(2)$ и $E(6)$.

Рассмотрим некоторые подмножества множества действительных чисел, называемые числовыми промежутками.

Множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a\leqslant x\leqslant b$, называют замкнутым промежутком, его иначе записывают так: $[a;b]$ (рис. 7). Ниже в таблице приведены некоторые промежутки, которые нам часто придется рассматривать при решении задач.

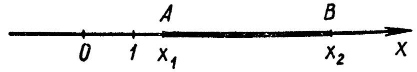


Рис. 6

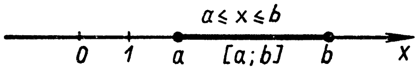
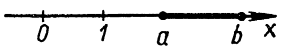
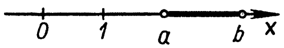
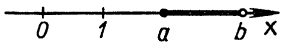
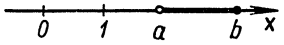
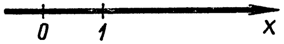
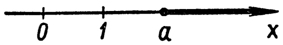
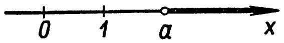
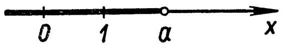
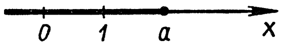


Рис. 7

---

[1] Здесь и далее знаком * отмечен необязательный материал.

Множество действительных чисел, заданное неравенством	Числовые промежутки	Изображение промежутка на координатной прямой
$a\leqslant x\leqslant b$	$[a;b]$ — замкнутый промежуток (отрезок)	
$a<x<b$	$]a;b[$ — открытый промежуток (интервал)	
$a\leqslant x<b$	$[a;b[$ — полуоткрытый промежуток	
$a<x\leqslant b$	$]a;b]$ — полуоткрытый промежуток	
$-\infty<x<\infty$	$]-\infty;\infty[=\boldsymbol{R}$ — числовая прямая	
$x\geqslant a$	$[a;\infty[$; лучи (полупрямые)	
$x>a$	$]a;\infty[$;	
$x<a$	$]-\infty;a[$	
$x\leqslant a$	$]-\infty;a]$	

Рассмотрим примеры на нахождение некоторых числовых промежутков.

Пример 1. Решите неравенство $x+5>17-2x$.

Решение. $x+2x>17-5$, $3x>12$, $x>\frac{12}{3}$, $x>4$. Множеством решений данного неравенства будет числовой луч $]4;\infty[$.

Пример 2. Решите неравенство $|x|<5$.

Прежде чем решать данное неравенство, вспомним определение модуля (абсолютной величины) числа:

$$|x|=\begin{cases}x, & \text{если } x\geqslant 0,\\ -x, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

Теперь приступим к решению данного неравенства.

Рассмотрим два случая:

а) $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x<5;\end{cases}$ $0\leqslant x<5$; б) $\begin{cases}x<0,\\ -x<5,\end{cases}$ $-5<x<0$.

Объединив найденные промежутки, получим ответ: $-5<x<5$, или $]-5;5[$.

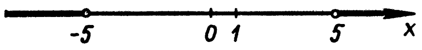


Рис. 8

Обращаем внимание на то, что неравенства $|x|<5$ и $-5<x<5$ определяют один и тот же промежуток $]-5; 5[$, поэтому эти неравенства эквивалентны. Аналогично эквивалентными буду неравенства $|x|<a$ и $-a<x<a$ для $a>0$.

Пример 3. Решите неравенство $|x|>5$.

Решение. а) $\begin{cases} x\geqslant 0, \\ x>5; \end{cases}$ $x>5$;

б) $\begin{cases} x<0, \\ -x>5; \end{cases}$ $\begin{cases} x<0, \\ x<-5; \end{cases}$ $x<-5$.

Решением данного неравенства будет объединение двух лучей: $]-\infty; -5[\cup]5; \infty[$ (рис. 8).

Обращаем внимание на то, что решением неравенства $|x|>a$, где $a>0$, будет объединение двух лучей $]-\infty; a[$ и $]a; \infty[$.

Пример 4. Решите неравенство $|x-2|\leqslant 6$.

Решение. Данное неравенство эквивалентно двойному неравенству: $-6\leqslant x-2\leqslant 6$. Далее, решая одновременно оба неравенства, получим:

$$2-6\leqslant x\leqslant 6+2,$$
$$-4\leqslant x\leqslant 8.$$

Ответ: $[-4; 8]$.

Пример 5. Решите неравенство $|2x-1|\geqslant 7$.

Решение. Решение данного неравенства сводится к решению двух систем неравенств:

1) $\begin{cases} 2x-1\geqslant 0, \\ 2x-1\geqslant 7; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x\geqslant 1, \\ 2x\geqslant 8; \end{cases}$ $\begin{cases} x\geqslant 0{,}5, \\ x\geqslant 4; \end{cases}$ $x\geqslant 4$.

2) $\begin{cases} 2x-1<0, \\ 2x-1\leqslant -7; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x<1, \\ 2x\leqslant -6; \end{cases}$ $\begin{cases} x<0{,}5, \\ x\leqslant -3; \end{cases}$ $x\leqslant -3$.

Ответ: $]-\infty; -3]\cup[4; \infty[$.

Упражнения

1. Постройте на координатной прямой точки: $A(-7)$, $B(5)$, $C(2)$. Найдите расстояния: $|AC|$, $|AB|$, $|BC|$.

2. Запишите в виде промежутков множества действительных чисел, заданные неравенствами: а) $x>5$; б) $x<3$; в) $x\leqslant -7$; г) $x\geqslant 0$; д) $-3<x\leqslant 7$; е) $0\leqslant x\leqslant 4$; ж) $-2\leqslant x\leqslant 4$. Покажите эти промежутки на координатной прямой.

3. Найдите пересечение числовых промежутков:

а) $[5; \infty[$ и $]7; \infty]$; б) $[-3; 5]$ и $]-\infty; 0]$; в) $]-\infty; 4]$ и $[0; \infty[$; г) $[6; \infty]$ и $[7; 8[$; д) $]-8; 10[$ и $]0; 5[$; е) $]-4; 0[$ и $[3; 4]$.

4. Найдите объединение числовых промежутков:

а) $[2; 4[$ и $]-7; 3[$; б) $]-2; 0[$ и $[0; \infty[$; в) $[-8; 15]$ и $[2; 4[$; г) $]-\infty; 4]$ и $[0; \infty[$; д) $]-3; 0]$ и $[5; \infty[$; е) $]-\infty; 0[$ и $]0; \infty[$.

5. Решите неравенства:

а) $2x+5\geqslant 11$; б) $x-1<3x+9$; в) $-7x+5\leqslant 3x+15$.

6. Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} 2x-1>5, \\ 3x<x+12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-1<2x+3, \\ 2x+3\geqslant x-1. \end{cases}$

7. Решите неравенства:

а) $|x|<7$; б) $|x|\geqslant 7$; в) $|2x+4|<10$; г) $|x-5|\geqslant 8$; д) $|x-1|\geqslant 2x+1$.

8*. Решите неравенство $|x-2|\geqslant|x-4|$.

§ 5. ПОВТОРЕНИЕ

1. Вычислите:

а) $3^{-2}+\left(-\frac{9}{8}\right)^{-1}-7^0$;

б) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-0{,}5}+81^{0{,}75}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-5}+\left(\frac{2}{7}\right)^0\cdot 7$.

2. Упростите выражения:

а) $\left(\frac{a+3}{a-3}+\frac{a-3}{a+3}\right):\frac{2a^2+18}{a^2-9}$; б) $\left(\frac{m-4}{m+4}-\frac{m+4}{m-4}\right):\frac{32m}{m^2-16}$.

3. Упростите выражение:

$$\left(\frac{a^2-b^2}{a-b}+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$$

и найдите его числовое значение при $a=4$, $b=9$.

4. Сформулируйте определение функции. Приведите пример линейной функции. Постройте ее график.

5. Найдите области определения функций:

а) $f(x)=\frac{x-2}{x}$; б) $f(x)=\frac{x}{x(x+6)}$;

в) $f(x)=x^2-4x+5$; г) $y=\sqrt{x-2}$.

6. Дана функция $f(x)=5x^2-4x+7$. Найдите:

а) $f(0)$; б) $f(-1)$; в) $f(2)$; г) $f(k+1)$.

7. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

$$f(x)=x^2 \text{ и } f(x)=7x-12.$$

8. Постройте графики функций:

а) $y=x-4$; б) $y=-2x+1$; в) $y=\frac{8}{x}$; г) $y=-\frac{8}{x}$.

9. Решите уравнения:

а) $\frac{x-5}{9}-\frac{2-x}{6}=2$; б) $\frac{7x+1}{6}-\frac{4-3x}{4}=3$;

в) $(x-3)^2-(x+4)x=15-10x$.

10. Решите графически системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x+2y=6, \\ x+y=-5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=1, \\ 2x-2=2y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=-1, \\ 2x-y=7. \end{cases}$

11. Решите квадратные уравнения:

а) $5x^2-4x=0$; б) $x^2-5=0$;
в) $12x^2-7x+1=0$; г) $3x^2-x+4=0$.

12. Приведите примеры числовых неравенств и неравенств с переменными. Сформулируйте свойства числовых неравенств.

13. Докажите, что $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$, если $a>0$, $b>0$.

14. Докажите, что при любых a, b, c выполняется неравенство

$$a^2+b^2+c^2+3\geqslant 2(a+b+c).$$

15. Решите неравенства:
а) $2x+5>0$; б) $3-2x<5$;
в) $7-x\geqslant 4x-8$; г) $2x-1\leqslant 3-x$.

16. Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} 3x-x>5, \\ 2x+1<6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+1\leqslant 3, \\ 5<3x+1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -x>2x+1, \\ 4x+2\geqslant -2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 1-x>5, \\ 5x+3>13. \end{cases}$

17. Решите неравенства:

а) $\frac{-7}{2x+3}>0$; б) $\frac{x^2+1}{x-1}<0$; в) $|x-1|<2$; г) $\frac{x+5}{2x-1}<0$.

18. Решите неравенства:

а) $2x^2>6$; б) $1-x^2>0$; в) $x^2-2x<0$; г) $(x+3)^2>0$;
д) $x^2-2x<3$; е) $x^2>12-x$; ж) $x^2+9>6x$; з) $x^2+4<4x$.

19. Запишите основные свойства операций, выполняемых на множестве рациональных чисел. Найдите в тексте § 3 утверждение о том, что этими свойствами обладают операции над действительными числами.

20. Представьте в виде бесконечной десятичной дроби числа:

а) 3,9; б) −2,15; в) $2\frac{3}{7}$; г) $\frac{11}{20}$; д) 0,(32); е) 2,7(5).

21. Докажите, что $\sqrt{12}$ — иррациональное число.

22. Докажите, что произведение рационального числа, отличного от нуля, на иррациональное число есть число иррациональное.

23. Найдите пересечения и объединения следующих множеств:
а) $\boldsymbol{N}\cap\boldsymbol{Q}$; б) $\boldsymbol{N}\cup\boldsymbol{Q}$; в) $\boldsymbol{R}\cap\boldsymbol{Z}$; г) $\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{Z}$; д) $\boldsymbol{N}\cap\boldsymbol{Z}$.

24. Постройте на координатной прямой числа: а) $\sqrt{7}$; б) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; в) $-2\sqrt{5}$.

25. Найдите десятичные приближения числа −3,73... по недостатку и по избытку с точностью до 0,1 и 0,01.

26. Найдите два десятичных знака суммы и три значащие цифры произведения чисел $1\frac{2}{3}$ и $\sqrt{2}$.

27. Найдите объединение и пересечение промежутков:
а) [−1; 5] и]2; 7]; б) [−3; −1] и]−1; 3]; в)]−∞; 7] и [5; ∞[. Покажите данные и полученные множества на координатной прямой.

28. С помощью графика функции $y=-2x+4$ найдите значения x, при которых $y<0$, $y>7$, $|y|\leqslant 3$.

29. Решите неравенство $\frac{1}{x-1}+\frac{x}{(x-1)^2}\geqslant 0$.

30. Решите уравнение $|x-2|=-\frac{1}{2}x+4$.

§ 6. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Упростите выражение $\left(\frac{4a+1}{4a-1}-\frac{4a-1}{4a+1}\right):\frac{8a}{16a^2-1}$.

2. Вычислите $\dfrac{\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}+(8\cdot 3^{-2})^0}{7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}$.

3. Найдите два десятичных знака суммы и три значащие цифры произведения чисел $1\frac{5}{6}$ и 0,8673578... .

4. Докажите, что $\sqrt{18}$ — иррациональное число.

5. Постройте графики функций: а) $y=3-2x$; б) $y=2-x^2$.

6. Решите уравнения:

а) $(x-4)^2+x(5-x)=5$; б) $(x-4)^2-x(5-x)=5$.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} x-3y=6, \\ x+y=2. \end{cases}$

8. Решите неравенства:
а) $x^2-4>0$; б) $x^2-3x+2\leqslant 0$.

9. Решите систему неравенств $\begin{cases} -3x>8-5x, \\ 3x-10<2x. \end{cases}$

10. Решите неравенство $|2x-3|<1$.

Глава II.

БЕСКОНЕЧНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 7. ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, СПОСОБЫ ЕЕ ЗАДАНИЯ

С понятием последовательности мы часто встречаемся в повседневной жизни. Например, токарь для изготовления детали выполняет операции в определенной последовательности. Каждой операции он обычно присваивает определенный порядковый номер — первая, вторая, третья и т. д. В данном примере число операций конечно. Таким образом устанавливается соответствие между конечным множеством натуральных чисел и множеством выполняемых операций. Это соответствие есть функция, определенная на множестве n первых натуральных чисел. Такая функция называется конечной последовательностью, а ее значения — членами последовательности. Членами последовательности могут быть объекты любой природы (геометрические фигуры, физические величины, числа и др.). Мы будет рассматривать только числовые последовательности. Они могут содержать как конечное, так и бесконечное число членов.

Если $f(n)$ — последовательность, то ее можно записать в виде упорядоченного множества: $(f(1); f(2); ...; f(n); ...)$.

Так, упорядоченное множество (1; 3; 5; 15) делителей числа 15 — конечная числовая последовательность; упорядоченное множество чисел (15; 30; 45; ...; $15k$; ...), где $k \in \boldsymbol{N}$, кратных 15,— бесконечная числовая последовательность.

Бесконечной числовой последовательностью называют числовую функцию, определенную на множестве всех натуральных чисел.

В дальнейшем мы будем рассматривать в основном бесконечные числовые последовательности, поэтому для краткости иногда будем называть их просто последовательностями.

Последовательность обозначают символом (x_n) или в виде упорядоченного множества $(x_1; x_2; ... x_n; ...)$, где $n \in \boldsymbol{N}$; n-й член x_n называют общим членом последовательности.

При изучении курса математики вы уже встречались с примерами последовательностей. Напомним некоторые из них:

а) (2; 4; 6; ...; $2n$; ...) — последовательность всех четных натуральных чисел;

б) (1; 3; 5; 7; ...; $2n-1$; ...) — последовательность всех нечетных натуральных чисел;

в) $(a;\ a+d;\ a+2d;\ ...;\ a+d(n-1);\ ...)$ — последовательность чисел, образующих арифметическую прогрессию с первым членом a и разностью d;

г) $(b;\ bq;\ bq^2;\ ...;\ bq^{n-1};\ ...)$ — последовательность чисел, образующих геометрическую прогрессию с первым членом b и знаменателем q;

д) последовательности десятичных приближений действительного положительного числа $\alpha = a_0, a_1a_1a_2a_3 ... a_n ...$ по недостатку $(a_0;\ a_0, a_1;\ a_0, a_1a_2;\ a_0, a_1a_2a_3; ...)$ и по избытку $(a_0+1;\ a_0, (a_1+1);\ a_0, a_1(a_2+1);\ a_0, a_1a_2(a_3+1); ...)$.

Последовательность считается заданной, если указано правило (закон), по которому можно вычислить любой ее член. Последовательность (x_n) является функцией, поэтому она задается так же, как и функция: аналитически, в том числе рекуррентно, с помощью таблицы, графически, словесно.

При аналитическом способе задания последовательности указывается формула общего ее члена, т. е. такая формула, которая позволяет по номеру n вычислить соответствующий член x_n последовательности.

Пример 1. $x_n = \frac{n}{3n+1}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

По этой формуле можно вычислить любой член последовательности:

$$x_1 = \frac{1}{3\cdot 1+1} = \frac{1}{4},\quad x_2 = \frac{2}{3\cdot 2+1} = \frac{2}{7}, ...,$$

$$x_k = \frac{k}{3k+1},\quad x_{k+1} = \frac{k+1}{3(k+1)+1} = \frac{k+1}{3k+4}, ...$$

Заданная последовательность имеет вид: $\left(\frac{1}{4}; \frac{2}{7}; ...; \frac{n}{3n+1}; ...\right)$.

Пример 2. $y_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

$$y_1 = \frac{1+(-1)^1}{1} = 0,\quad y_2 = \frac{1+(-1)^2}{2} = 1,\quad y_3 = \frac{1+(-1)^3}{3} = 0,$$

$$y_4 = \frac{1+(-1)^4}{4} = \frac{1}{2}, ...;$$

$\left(0;\ 1;\ 0;\ \frac{1}{2};\ 0;\ ...;\ \frac{1+(-1)^n}{n};\ ...\right)$ — заданная последовательность.

Пример 3. $a_n = 8$, $n \in \boldsymbol{N}$.

$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = ... = a_n = ... = 8$; (8; 8; 8; ... 8; ...) — заданная последовательность.

Из примеров 2 и 3 видно, что некоторые члены последовательности (или даже все ее члены) могут быть равными.

Последовательность, все члены которой равны, называют постоянной.

Последовательность называют возрастающей, если каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего. Если каждый член последовательности, начиная со второго, меньше предыдущего, то такую последовательность называют убывающей.

Для установления возрастания или убывания последовательности (a_n) надо определить знак разности $a_{n+1} - a_n$. Для возрастающей последовательности $a_{n+1} - a_n > 0$, для убывающей — $a_{n+1} - a_n < 0$ при $n \in N$.

Пример. Докажите, что последовательность $y_n = \frac{3-2n}{4}$, $n \in N$, является убывающей.

Решение. $y_{n+1} = \frac{3-2(n+1)}{4} = \frac{1-2n}{4}$. Найдем разность $y_{n+1} - y_n$.

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1-2n}{4} - \frac{3-2n}{4} = \frac{1-2n-3+2n}{4} = -\frac{1}{2} < 0.$$

Получили, что $y_{n+1} < y_n$ при любом $n \in N$. Следовательно, данная последовательность убывающая.

Более общими являются понятия неубывающей и невозрастающей последовательностей, которые называют монотонными.

Например, последовательность $(x_n) = (1;\ 1;\ 2;\ 2;\ 3;\ 3;\ \dots;\ n;\ n;\ \dots)$ неубывающая, а последовательность $(y_n) = (1;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \dots;\ \frac{1}{n};\ \frac{1}{n};\ \dots)$ невозрастающая.

При графическом способе задания последовательность изображается множеством точек $M(n;\ f(n))$ координатной плоскости, абсциссы которых — порядковые номера членов последовательности, ординаты — соответствующие члены последовательности. На рисунках 9, 10, 11 изображены соответственно последовательности $f(n) = \frac{1}{n}$, $\varphi(n) = 1^n$, $q(n) = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in N$. Графически последовательность можно изобразить и в виде точек координатной прямой. Например, на рисунке 12 изображены члены последовательности $x_n = 2n$, $n \in N$, а на рисунке 13 — члены последовательности $y_n = \frac{1}{n}$, $n \in N$.

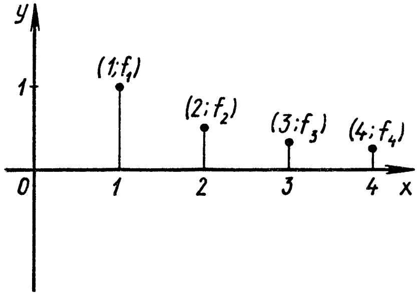


Рис. 9

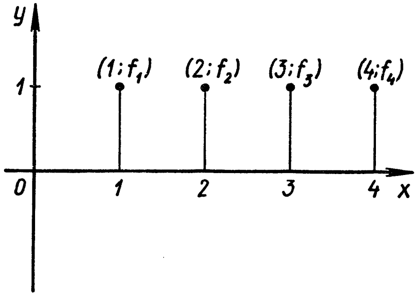


Рис. 10

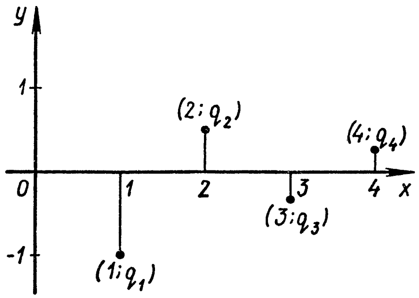


Рис. 11

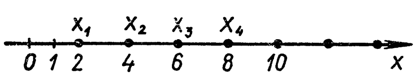


Рис. 12

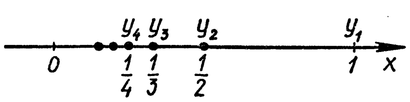


Рис. 13

При рекуррентном способе задания последовательности указывается один или несколько первых ее членов, а также формула, позволяющая вычислять любой член последовательности по известным предшествующим членам.

Пример 5. Зададим последовательность (a_n) рекуррентно:

$$a_1 = 1,\ a_2 = -3,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n \in N,\ n \geqslant 3.$$

По этому заданию может быть найден любой член последовательности:

$$a_3 = a_2 + a_1 = (-3) + 1 = -2$$
$$a_4 = a_3 + a_2 = (-2) + (-3) = -5,$$
$$a_5 = a_4 + a_3 = (-5) + (-2) = -7 \text{ и т. д.}$$

Последовательность имеет вид: $(1;\ -3;\ -2;\ -5;\ -7;\dots)$.

Упражнения

1. Составьте план ответа по тексту параграфа.

2. Найдите в тексте определение бесконечной числовой последовательности. Приведите примеры числовых последовательностей.

3. Найдите 10-й член последовательности $\left(\frac{5n}{n+2}\right)$, где $n \in N$.

4. Выпишите пять первых членов последовательности (x_n), если:

а) $x_n = 3n - 2$; б) $x_n = n^2 - 5n + 4$; в) $x_n = \frac{2n-1}{3n+2}$;

г) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$; д) $x_n = 1 + \frac{1}{2^n}$, где $n \in N$.

5. Последовательность (u_n) задана формулой $u_n = \frac{1}{n+3}$, $n \in N$. Найдите u_1, u_5, u_{12}.

6. Дана последовательность $b_n = \frac{2n-1}{3n+5}$, $n \in N$. Найдите b_7, b_{12}, $b_{k+1} - b_k$, $\frac{b_{k+1}}{b_k}$.

7. Является ли членом последовательности $a_n = 2n + 5$, $n \in N$, число: а) 29; б) 252; в) 1000? Если является, то каков его номер?

8. Является ли членом последовательности $x_n = n^2 - 7n$, $n \in N$, число: а) -12; б) 0; в) 48? Если является, то каков его номер?

9. Укажите, начиная с какого номера каждый член последовательности $(7;\ 12;\ 17;\ \dots;\ 5n + 2;\ \dots)$, $n \in N$, больше 60.

10. Найдите номера членов последовательности $f(n) = 6n - 54$, $n \in N$, для которых $f(n) \leqslant 10$.

11. Вычислите пять первых членов последовательности (a_n), если:

а) $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_n = 2a_{n-2} + a_{n-1}$; б) $a_1 = -2$, $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$; в) $a_1 = 1$, $a_2 = -5$, $a_n = \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$; г) $a_1 = a_2 = 3$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$, где $n \in N$.

12. Изобразите графически на координатной плоскости и координатной прямой четыре первых члена последовательности:

а) $(2;\ 1;\ 0;\ \dots;\ 3 - n;\ \dots)$; б) $x_n = (-1)^n$; в) $y_n = -0{,}5n^2$; г) $z_n = \frac{3n-1}{n+2}$, где $n \in N$; д)* $a_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ — четное число,} \\ 2^n, & \text{если } n \text{ — нечетное число.} \end{cases}$

13. Выпишите четыре первых члена последовательности, составленной из десятичных приближений с недостатком иррационального числа: а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{6}$; в) $\sqrt{12}$.

14. Докажите, что последовательность (x_n) является возрастающей, если: а) $x_n = 3n - 1$; б) $x_n = n^2 + n$; в) $x_n = \frac{2n-1}{n}$, $n \in N$.

15. Докажите, что последовательность (y_n) является убывающей, если: а) $y_n = 2 - 5n$; б) $y_n = -n^2 + 2$; в) $y_n = \frac{3n+1}{n}$, $n \in N$.

§ 8. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Прежде чем вводить определение предела последовательности, рассмотрим примеры. Пусть даны последовательности:

$$\text{а) } x_n = \frac{n}{n+1};\quad \text{б) } y_n = \frac{n+1}{n};\quad \text{в) } z_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}.$$

Вычислим несколько первых членов каждой из них и изобразим их точками координатной прямой (рис. 14—16).

Последовательность (x_n) возрастает, и ее члены с возрастанием номера n приближаются (как угодно близко!) к единице слева (рис. 14). Говорят, что последовательность (x_n) стремится к пределу 1 при неограниченном возрастании n.

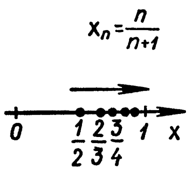


Рис. 14

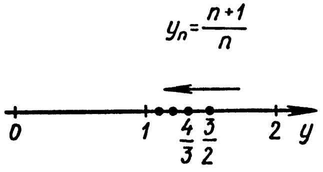


Рис. 15

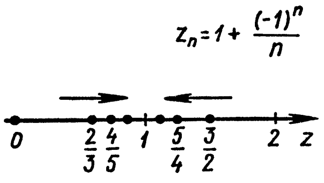


Рис. 16

Последовательность (y_n) убывает, и ее члены приближаются (как угодно близко!) к единице справа с возрастанием номера n (рис. 15). Говорят, что последовательность (y_n) стремится к пределу 1 при неограниченном возрастании n.

Последовательность (z_n) немонотонна, но члены ее приближаются к единице с возрастанием n как справа, так и слева (рис. 16).

Уточним понятие предела последовательности. Для этого рассмотрим внимательнее последовательность $y_n = \frac{n+1}{n}$. Покажем, что с увеличением номера n, во-первых, расстояния между пределом последовательности (числом 1) и ее членами уменьшаются и, во-вторых, эти расстояния могут быть как угодно малыми, начиная с некоторого номера n.

Вычислим разность (расстояние) между y_n и 1:

$$|y_1 - 1| = 2 - 1 = 1;$$
$$|y_2 - 1| = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2};$$
$$|y_3 - 1| = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3};$$
$$\dots$$
$$|y_{1000} - 1| = \frac{1001}{1000} - 1 = \frac{1}{1000};$$
$$\dots$$
$$|y_n - 1| = \frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{n}.$$

Замечаем, что с увеличением номера n члены последовательности приближаются к числу 1, т. е. выполняется первое условие. При этом расстояния между числом 1 и членами последовательности, начиная с некоторого номера n_0, как угодно малы, меньше любого сколь угодно малого положительного числа ε, т. е. $|y_n - 1| < \varepsilon$, для всех $n > n_0$. Например, если $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, то $|y_n - 1| < \frac{1}{1000}$ или $\frac{1}{n} < \frac{1}{1000}$, откуда $n > 1000$. Это означает, что для всех y_n с номерами $n > 1000$ выполняется неравенство $|y_n - 1| < \frac{1}{1000}$.

Определение. **Число a называется пределом последовательности (x_n), если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число n_0, что для всех членов последовательности с номерами $n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.**

Записывается это так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$. Читается: «Предел последовательности (x_n) при эн, стремящемся к бесконечности, равен a».

Для рассмотренных выше числовых последовательностей имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1;\ \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1;\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=1.$$

О числовых последовательностях, имеющих предел, говорят, что они сходятся.

Последовательность, имеющую предел, называют сходящейся, а не имеющую предела — расходящейся.

Для доказательства сходимости последовательности достаточно найти ее предел или доказать, что он существует.

Задание 1. Рассмотрите последовательность $x_n = \frac{2n+1}{n}$. Изобразите ее графически. Имеет ли эта последовательность предел? Чему он равен?

Утверждение «число a является пределом последовательности (x_n) при $n \to \infty$» означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число n_0, зависящее от ε, что для всех членов последовательности $(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_{n_0};\ x_{n_0+1};\ \ldots)$, у которых порядковый номер $n > n_0$, имеет место неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Последнее неравенство эквивалентно неравенству $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Геометрически неравенство $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ означает, что бесконечное множество членов последовательности (x_n) попадают в промежуток $]a-\varepsilon;\ a+\varepsilon[$ (рис. 17), а вне этого промежутка остается конечное число членов.

Любой интервал $]a-\varepsilon;\ a+\varepsilon[$ числовой прямой называют окрестностью точки a радиуса ε. Поэтому утверждение $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ равносильно следующему утверждению: каков бы ни был интервал $]a-\varepsilon;\ a+\varepsilon[$, начиная с некоторого номера n_0, все точки x_n при $n > n_0$ принадлежат этому интервалу.

Пример 1. Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что $\lim x_n = 5$, если $x_n = \frac{5n+1}{n}$. Найдите номера членов последовательности (x_n), для которых $|x_n - 5| < \varepsilon$ при $\varepsilon = 0{,}1;\ 0{,}01$.

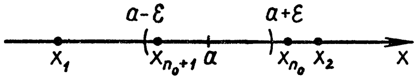


Рис. 17

Решение. Исходя из определения предела последовательности, надо доказать, что, каким бы ни было задано произвольное сколь угодно малое $\varepsilon > 0$, для него найдется такое натуральное число n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n - 5| < \varepsilon$.

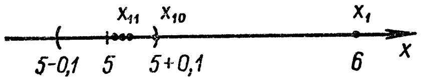


Рис. 18

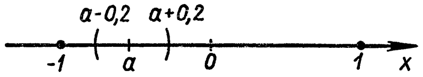


Рис. 19

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как $|x_n - 5| = \left|\frac{5n+1}{n} - 5\right| = \left|5 + \frac{1}{n} - 5\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$, то для отыскания значений n, при которых будет выполняться неравенство $|x_n - 5| < \varepsilon$, нужно решить неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Решая его, получим $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Если $\varepsilon = 0{,}1$ то $n > \frac{1}{0{,}1}$; $n > 10$. Поэтому $n_0 = 10$. Неравенство $|x_n - 5| < 0{,}1$ выполняется для всех $n > 10$. Геометрически это значит, что, начиная с x_{11}, все члены последовательности попадут в окрестность точки 5 радиуса 0,1, вне ее находятся лишь точки $x_1;\ x_2;\ x_3;\ \ldots;\ x_{10}$ (рис. 18).

Если $\varepsilon = 0{,}01$, то $n > 100$ и $|x_n - 5| < 0{,}01$ для всех $n > 100$.

Пример 2. Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Решение. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как $\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$, то неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$ будет выполняться при $n > n_0$, где $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. Итак, $\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon$ для всех $n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Задание 2. Объясните, почему последовательность $a_n = (-1)^n$ не имеет предела (см. рис. 19).

Существование предела последовательности связано с понятием ограниченности последовательности. Последовательность (a_n) называют ограниченной сверху, если существует такое число M, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство $a_n \leqslant M$. Последовательность (b_n) называют ограниченной снизу, если существует такое число m, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство $b_n \geqslant m$.

Так последовательность $x_n = \frac{n}{n+1}$ ограничена сверху числом 1, последовательность $y_n = \frac{n+1}{n}$ ограничена числом 1 снизу.

Последовательность (c_n) называется ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу, т. е. существуют такие числа M и m, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство $m \leqslant c_n \leqslant M$.

Например, последовательность $z_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ ограничена, так как для любого $n \in N$ выполняется неравенство $-1 \leqslant z_n \leqslant 1$.

Можно доказать, что если последовательность имеет предел, то он единственный. В математике часто важно знать не числовую величину предела последовательности, а сам факт его существования. Монотонная ограниченная последовательность имеет предел (теорема Вейерштрасса[1]). Доказательство этой теоремы выходит за пределы школьного курса математики.

Упражнения

1. Составьте план параграфа «Предел последовательности».

2. На координатной прямой покажите окрестность радиуса ε точки a.

3. Запишите с помощью знака модуля следующие высказывания: а) 10-й член последовательности (a_n) принадлежит окрестности точки 7 радиуса 1; б) 20-й член последовательности (x_n) принадлежит окрестности точки 7 радиуса 0,01; в) n-й член последовательности (b_n) принадлежит окрестности точки 7 радиуса 0,001.

4. Дана последовательность $a_n = \frac{3n+1}{n}$. Вычислите расстояние от точки 3 до членов последовательности с номерами 3, 10, 80, 200, n.

5. Укажите номер члена последовательности $x_n = \frac{2n+3}{n}$, начиная с которого все ее члены удовлетворяют условию: а) $|x_n - 2| < 0{,}1$; б) $|x_n - 2| < 0{,}001$.

6. Сформулируйте определение предела последовательности.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Что означает геометрически эта запись?

8. В некоторой окрестности точки a содержится бесконечное множество членов последовательности (x_n). Следует ли из этого, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$?

9. В любой окрестности точки a находится бесконечное множество членов последовательности (x_n). Можно ли утверждать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$?

---

[1] Карл Вейерштрасс (1815—1897) — выдающийся немецкий математик. Его работы посвящены многим разделам математики (математическому анализу, теории аналитических функций, дифференциальной геометрии и алгебре). Заметим, что известный математик Софья Васильевна Ковалевская была ученицей Вейерштрасса.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n}{2+n} = -1$. Укажите номера тех членов последовательности $\left(\frac{1-n}{2+n}\right)$, которые расположены вне окрестности точки -1 радиуса ε, если: а) $\varepsilon = 0{,}1$; б) $\varepsilon = 0{,}001$.

11. Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-1}{n} = 3$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+5} = \frac{1}{2}$.

12. Дана последовательность $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$. а) Вычислите несколько первых ее членов; б) изобразите их на координатной прямой; в) найдите предел последовательности.

13*. Может ли предел последовательности, все члены которой — рациональные числа, быть иррациональным числом?

14*. Может ли предел последовательности, все члены которой — иррациональные числа, быть рациональным числом?

§ 9. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

При нахождении пределов последовательностей часто приходится применять теоремы о пределе постоянной последовательности и о пределе суммы, произведения и частного последовательностей. Доказательство этих теорем выходит за рамки программы средней школы. Поэтому мы ограничимся лишь формулировками и покажем их применение к решению упражнений. При этом под суммой двух последовательностей будем понимать последовательность, члены которой получены путем сложения соответствующих членов данных последовательностей. Аналогично вводятся понятия произведения и частного двух последовательностей.

Теорема 1. ***Предел постоянной последовательности равен члену этой последовательности.***

Пример 1. $\lim\limits_{n\to\infty} 8 = 8$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi}$; $\lim\limits_{n\to\infty} 1000 = 1000$.

Теорема 2. ***Предел суммы двух сходящихся последовательностей существует и равен сумме пределов этих последовательностей.***

Если (x_n) и (y_n) — сходящиеся последовательности и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a + b$.

Пример 2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$, то согласно теореме

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + z_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} z_n = 2 + 1 = 3.$$

Пример 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 3 + 0 = 3$.

Теорема 3. ***Предел произведения двух сходящихся последовательностей существует и равен произведению пределов этих последовательностей.***

Если (x_n) и (y_n) — сходящиеся последовательности и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$.

Следствие. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела.*

Если $c = \text{const}$, (a_n) — сходящаяся последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$.

Пример 4. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 7$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{2}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (2x_n \cdot y_n) = 2 \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 2 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = 7$.

Пример 5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{0{,}2n^2 + 5}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(0{,}2 + \frac{5}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 0{,}2 + 5 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0{,}2.$

Теорема 4. ***Предел частного двух сходящихся последовательностей равен частному пределов этих последовательностей при условии, что предел делителя не равен нулю.***

Если (x_n) и (y_n) — сходящиеся последовательности и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}$.

Пример 6. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -0{,}3$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 2$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{-0{,}3}{2} = -0{,}15$.

Теорема 5. ***Если члены некоторой последовательности заключены между соответствующими членами двух других последовательностей, имеющих один и тот же предел, то и первая последовательность имеет тот же предел.***

Пусть заданы последовательности (z_n), (x_n), (y_n), такие, что $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Пример 7. Пусть имеем последовательности $\left(\frac{n}{n+1}\right)$, $\left(\frac{n+1}{n}\right)$, $\left(\frac{n+2}{n}\right)$, причем $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n} < \frac{n+2}{n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = 1$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

Рассмотрим на примерах применение сформулированных выше теорем к вычислению пределов последовательностей.

Пример 8. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n-7}{12-3n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3(5n^2-n+4)}{2-7n-3n^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2-1}{4n^3-2n^2+5n-7}$, г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$.

Решение. а) Числитель и знаменатель представляют собой расходящиеся последовательности (каждая из них неограничена), поэтому нельзя сразу применять теорему о пределе частного. Поступаем так: делим числитель и знаменатель на n (величина дроби от этого не изменяется), затем применяем теоремы о пределах частного и суммы. Приводим подробную запись вычислений предела:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n-7}{12-3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5-\frac{7}{n}}{\frac{12}{n}-3} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{7}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{12}{n}-3\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 5 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{12}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} 3} = \frac{5 - 7 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{12 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} - 3} = \frac{5-7\cdot 0}{12\cdot 0-3} = -\frac{5}{3}.$$

б) Данный предел находится аналогично предыдущему, делением числителя и знаменателя дроби на n^2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3(5n^2-n+4)}{2-7n-3n^2} = \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{5-\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}{\frac{2}{n^2}-\frac{7}{n}-3} =$$

$$= 3 \cdot \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}-\frac{7}{n}-3\right)} = 3\,\frac{\lim\limits_{n\to\infty} 5 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} 3} =$$

$$= \frac{3\cdot 5}{-3} = -5.$$

в) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-1}{4n^3-2n^2+5n-7} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}-\frac{1}{n^3}}{4-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}-\frac{7}{n^3}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}-\frac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}-\frac{7}{n^3}\right)} = \frac{0}{4} = 0.$$

г) Числитель дроби есть сумма n членов арифметической прогрессии, а знаменатель — сумма n членов другой арифметической прогрессии. Преобразуя эти суммы по формуле $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, получим:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2+2n}{2}\cdot n}{\frac{1+2n-1}{2}\cdot n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Упражнения

1. Запишите теоремы о пределах последовательностей символически.

2. Приведите примеры двух сходящихся последовательностей. Составьте их сумму и покажите, что она сходится.

3. Истинно ли высказывание: если сумма двух последовательностей — сходящаяся последовательность, то и каждая из данных последовательностей сходится?

4. Докажите сходимость последовательностей:

а) $x_n = \frac{1}{2n} + 3$; б) $y_n = 7 - \frac{3}{n^2}$; в) $z_n = \frac{1}{5n^2} - \frac{1}{2^n}$.

5. Последовательность (x_n) имеет предел a, а последовательность (y_n) — предел $b \neq 0$. Верно ли, что имеет предел последовательность: а) $(x_n \cdot y_n)$; б) $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$?

6. Последовательности (x_n) и (y_n) сходящиеся. Следует ли из этого, что последовательность $\frac{x_n}{y_n}$ тоже сходящаяся?

7. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$, если:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -3$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 2$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 5$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$. Найдите предел последовательностей:

а) $y_n = \frac{3x_n - 5}{x_n + 1}$; б) $z_n = \frac{x_n^2 - 9}{x_n - 8}$; в) $u_n = \frac{2x_n^2 - 5x_n + 3}{x_n - 6}$.

9. Применяя теоремы о пределах, найдите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{2-n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2-7n+1}{2+3n-n^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7-2n}{3n^2+5}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)(n+3)}{2n^2+1}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+2+3+\ldots+n}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

10. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n+2}{3n}+\frac{n^2+1}{2n^2-5}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^4}{2n^4+3}+\frac{3n^2-2n^3+6}{7-12n+4n^3}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{7n+2}\cdot\frac{1-3n-5n^2}{9n^2+17}\right)$.

§ 10. СУММА БЕСКОНЕЧНО УБЫВАЮЩЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Определение. **Последовательность $(b; bq; \ldots; bq^{n-1}; \ldots)$, где $n \in N$, $|q| < 1$, $q \neq 0$, b — любое число, отличное от нуля, называется бесконечно убывающей геометрической прогрессией.**

Число b называют первым членом прогрессии, q — ее знаменателем. Например, последовательность $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{18}; \ldots; \frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}; \ldots\right)$ — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с первым членом $\frac{1}{2}$ и знаменателем $\frac{1}{3}$.

Найдем сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии. До сих пор мы имели дело с суммами с конечным числом слагаемых. В данном же случае число слагаемых бесконечно: $b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1} + \ldots$. Поэтому сформированное ранее представление о сумме для данного случая неприменимо. Необходимо вначале определить, что же будем понимать под суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Определение. **Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии называют предел суммы n первых ее членов при $n \to \infty$.**

Ниже показано существование такой суммы непосредственным вычислением предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Заметим вначале, что верна теорема.

Теорема. *$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$.*

Например, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

Доказательство этой теоремы мы не приводим.

Теперь перейдем к выводу формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Сумма первых n членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии может быть найдена по формуле суммы членов геометрической прогрессии: $S_n = \frac{b(1-q^n)}{1-q}$.

Найдя предел этой суммы при $n \to \infty$, получим сумму бесконечно убывающей прогрессии:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{1-q} \cdot \lim_{n\to\infty} (1-q^n) =$$

$$= \frac{b}{1-q}(1 - \lim_{n\to\infty} q^n) = \frac{b}{1-q}(1-0) = \frac{b}{1-q}.$$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна частному от деления первого члена прогрессии на разность единицы и знаменателя прогрессии: $S = \frac{b}{1-q}$.

Пример 1. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии 4; -2; 1; $-\frac{1}{2}$; ..., у которой $b = 4$, $q = -\frac{1}{2}$, равна $S = \frac{4}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

Пример 2. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии -8; -4; -2; ..., у которой $b = -8$, $q = \frac{1}{2}$, равна $S = \frac{-8}{1-\frac{1}{2}} = -16$. Обратим внимание на то, что члены данной последовательности возрастают. Тем не менее в соответствии с принятым нами определением мы ее называем бесконечно убывающей (модули ее членов убывают).

Теперь покажем, как бесконечную десятичную периодическую дробь можно представить в виде обыкновенной дроби.

Пример 3. Запишите в виде обыкновенной дроби число 0,(12).

Решение. Число 0,(12) = 0,12121212... представим в виде суммы бесконечного числа слагаемых: $0{,}(12) = \frac{12}{100} + \frac{12}{10000} + \frac{12}{1000000} + \ldots$. Слагаемые этой суммы $\frac{12}{100}$; $\frac{12}{10000}$; $\frac{12}{1000000}$; ...— члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $b = \frac{12}{100}$, $q = \frac{1}{100}$. Так как $|q| = \frac{1}{100} < 1$, то $\frac{12}{100} + \frac{12}{10000} + \frac{12}{1000000} + \ldots = \frac{\frac{12}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$. Таким образом, $0{,}(12) = \frac{4}{33}$.

Пример 4. Запишите в виде обыкновенной дроби число 7,5(63).

Решение. $7{,}5(63) = 7{,}5636363\ldots = 7 + \frac{5}{10} + \left(\frac{63}{1000} + \frac{63}{100000} + \frac{63}{10000000} + \ldots\right)$. Слагаемые записанной суммы, начиная с третьего,— члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $b = \frac{63}{1000}$, $|q| = \frac{1}{100} < 1$, значит, $7{,}5(63) = 7 + \frac{5}{10} + \frac{\frac{63}{1000}}{1-\frac{1}{100}} = 7 + \frac{5}{10} + \frac{63}{990} = 7\frac{31}{55}$.

Правило обращения периодических дробей в обыкновенные дроби см. в § 1.

Упражнения

1. Какая числовая последовательность называется геометрической прогрессией? Приведите примеры бесконечно убывающих геометрических прогрессий.

2. Сформулируйте определение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

3. Найдите пределы последовательностей: а) $x_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$; б) $y_n = (0{,}2)^n$; в) $z_n = \left(\frac{7}{8}\right)^n$.

4. Вычислите суммы бесконечно убывающих геометрических прогрессий:

а) 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; ... ;　　б) 3; -1; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{9}$; ... ;

в) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$; 1; $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$; ... ;　　г) $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^2}$; $\frac{1}{x^3}$; ...　($|x| > 1$).

5. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n), если известно, что: а) $b_2 = 3$, $q = \frac{2}{3}$; б) $b_2 = -1$, $q = -\frac{3}{4}$; в) $b_3 = 2$, $q = \frac{3}{5}$; г) $b_3 = -\frac{1}{3}$, $q = -\frac{1}{3}$.

6. Напишите бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом 6, если сумма ее равна 12.

7. В квадрат, длина стороны которого равна a, вписан путем соединения середин его сторон новый квадрат, в этот квадрат таким же образом вписан другой квадрат и т. д. (рис. 20, *а*). Найдите: а) сумму периметров всех квадратов; б) сумму площадей всех квадратов.

8. В равносторонний треугольник, длина стороны которого равна a, вписан посредством соединения середин его сторон новый треугольник, в этот треугольник таким же образом вписан другой треугольник и т. д. (рис. 20, *б*).

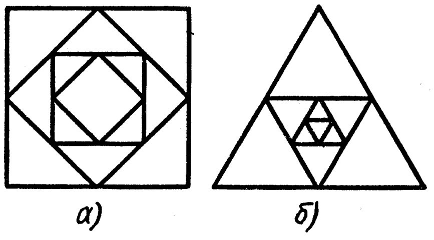


Рис. 20

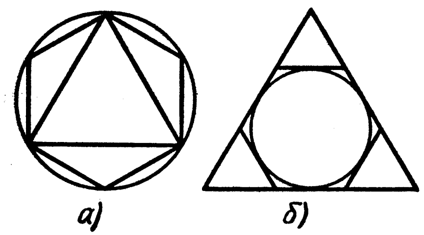


Рис. 21

Найдите: а) сумму периметров всех треугольников; б) сумму площадей всех треугольников.

9. Запишите в виде обыкновенных дробей числа:

а) 0,(54);
б) 12,(3);
в) −2,72(6);
г) −3,5(72).

10*. Решите уравнения:

а) $\frac{1}{x}+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{7}{2}, \quad |x|<1;$

б) $2x+1+x^2-x^3+x^4-\ldots=\frac{13}{6}, \quad |x|<1.$

11*. Постройте график функции $y=x+\frac{x}{1+x}+\frac{x}{(1+x)^2}+\ldots$, если $|1+x|>1$.

§ 11. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ. ЧИСЛО π

Ранее в курсе геометрии были введены понятия длины отрезка, длины ломаной, периметра многоугольника. Теперь мы введем понятие длины окружности. Вначале рассмотрим примеры.

На рисунке 21, *а* изображен правильный треугольник, вписанный в окружность. В результате удвоения числа его сторон получился правильный шестиугольник, вписанный в эту же окружность. Удвоив число сторон шестиугольника, получим двенадцатиугольник. На рисунке 21, *б* изображен правильный треугольник, описанный около окружности. В результате удвоения числа его сторон образован правильный шестиугольник, также описанный около этой окружности.

Из рисунков видно, что с увеличением числа сторон вписанного или описанного многоугольника его граница приближается к окружности.

Предположим, что число сторон многоугольников, вписанных в окружность и описанных около нее, неограниченно удваивается. Тогда получим две последовательности периметров: а) последовательность периметров вписанных многоугольников (p_1; p_2; p_3; ... ; p_n; ...), где p_1 — периметр треугольника, p_2 — периметр шестиугольника и т. д.; б) последовательность периметров описанных многоугольников (p'_1; p'_2; p'_3; ... ; p'_n; ...), где p'_1 — периметр треугольника, p'_2 — периметр шестиугольника и т. д.

Последовательность (p_n) возрастает и ограничена сверху периметром любого описанного многоугольника, значит, по теореме Вейерштрасса существует предел: $\lim\limits_{n\to\infty} p_n=C$.

Последовательность (p'_n) убывает и ограничена снизу периметром любого вписанного многоугольника, значит, по теореме Вейерштрасса существует предел: $\lim\limits_{n\to\infty} p'_n=C'$.

Интуиция подсказывает, что эти пределы должны совпадать, что и происходит на самом деле. Доказательство этого факта выходит за рамки программы средней школы. В том, что члены последовательностей (p_n) и (p'_n) приближаются друг к другу, убедимся непосредственным нахождением их числовых значений.

Если a_n — длина стороны правильного n-угольника, вписанного в окружность единичного радиуса, а b_n — длина стороны правильного n-угольника, описанного около той же окружности (рис. 22, *а*), то $a_n=|AB|=2\sin\frac{180^\circ}{n}$, $b_n=|CD|=2|CB|=2\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}$, тогда $p_n=na_n=2n\sin\frac{180^\circ}{n}$, $p'_n=nb_n=2n\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}$.

Воспользовавшись этими формулами, найдем значения p_n, p'_n и p'_n-p_n при различных n. Результаты вычислений приведены в таблице:

n	p_n	p'_n	p'_n-p_n
6	6,00000	6,92820	0,92820
12	6,21160	6,48078	0,26918
24	6,26526	6,31932	0,05406
48	6,27870	6,29218	0,01348
96	6,28206	6,28542	0,00336
192	6,28290	6,28374	0,00084
384	6,28312	6,28332	0,00020
768	6,28316	6,28322	0,00006
1536	6,28318	6,28320	0,00002
3072	6,28318	6,28318	0,00000...

Из таблицы видно, что p_n и p'_n с увеличением n сближаются, т. е. при $n\to\infty$, $p'_n-p_n\to 0$. Поэтому можно предположить, что $\lim\limits_{n\to\infty} p_n=\lim\limits_{n\to\infty} p'_n$.

Такой же предел имеет последовательность периметров любого многоугольника, вписанного в данную окружность или описанного около нее, при выполнении двух условий: а) число сторон многоугольников должно бесконечно возрастать; б) длина каждой стороны должна стремиться к нулю.

Определение. **Длиной окружности называется предел последовательности периметров многоугольников, вписанных в эту окружность (или описанных около нее) при бесконечном увеличении числа их сторон и стремлении к нулю каждой стороны.**

Таким образом, по определению длина C окружности равна:

$$C=\lim_{\substack{n\to\infty\\ a_n\to 0}} p_n=\lim_{\substack{n\to\infty\\ b\to 0}} p'_n.$$

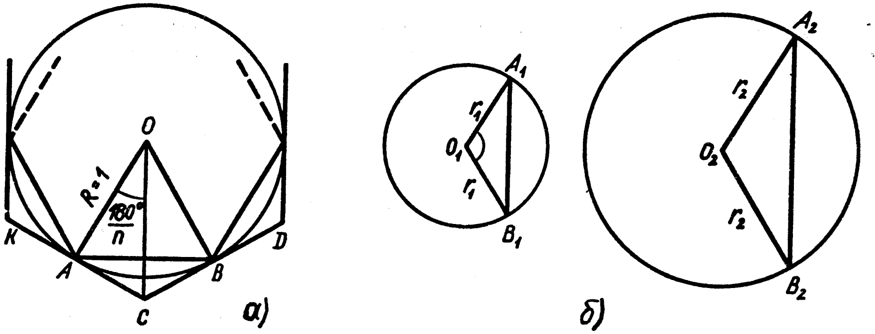


Рис. 22

Теорема. ***Отношение длины окружности к своему диаметру есть число постоянное для всех окружностей.***

Дано: окр $(O_1;\ r_1)$, окр $(O_2;\ r_2)$.

Доказать: $\frac{C_1}{2r_1}=\frac{C_2}{2r}$, где C_1 и C_2 — длины данных окружностей.

Доказательство. Впишем в каждую из данных окружностей по правильному n-угольнику (рис. 22, *б*). На рисунке $[A_1B_1]$ и $[A_2B_2]$ — стороны этих n-угольников. Треугольники $A_1O_1B_1$ и $A_2O_2B_2$ равнобедренные, и $\widehat{A_1O_1B_1}=\widehat{A_2O_2B_2}=\frac{360°}{n}$, поэтому $\triangle A_1O_1B_1 \infty \triangle A_2O_2B_2$, откуда $\frac{|A_1B_1|}{r_1}=\frac{|A_2B_2|}{r_2}$, $\frac{n|A_1B_1|}{r_1}=\frac{n|A_2B_2|}{r_2}$. Обозначим $p_n=n|A_1B_1|$, $p'_n=n|A_2B_2|$ — периметры многоугольников. Получим $\frac{p_n}{2r_1}=\frac{p'_n}{2r_2}$. Это равенство означает, что соответствующие члены последовательностей $\left(\frac{p_n}{2r_1}\right)$ и $\left(\frac{p'_n}{2r_2}\right)$ равны, поэтому равны и их пределы: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{2r_1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p'_n}{2r_2}$.

Применяя теорему о пределе частного, получим:

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} p_n}{2r_1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} p'_n}{2r_2}\ \text{или}\ \frac{C_1}{2r_1}=\frac{C_2}{2r_2}.$$

Теорема доказана.

Отношение длины окружности к своему диаметру $\frac{C}{2r}$ обозначают буквой π. Так как это отношение для всех окружностей одинаково, то для любой окружности справедлива формула $C=2\pi r$, где r — радиус окружности, или $C=\pi D$, где D — диаметр окружности.

Задание. Докажите рассмотренную выше теорему, описывая около окружностей $(O_1;\ r_1)$ и $(O_2;\ r_2)$ правильные n-угольники.

В математике и ее приложениях число π используется довольно часто. Приближенное значение этого числа можно получить, воспользовавшись приведенной выше таблицей периметров многоугольников, вписанных в окружность радиуса 1 и описанных около нее. Так, приняв периметр вписанного 96-угольника за приближенную длину окружности, получим для $\pi \approx \frac{p_n}{2R}$ приближенное числовое значение 3,14 (с недостатком) с точностью до 0,01. Из этой таблицы видно, что с увеличением n возрастает точность приближенных значений π. Например, при $n=384$ получим $\pi \approx 3{,}141$; при $n=1536$ получим $\pi \approx 3{,}1415$. и т. д.

Число π иррациональное. Его значение можно найти с любой наперед заданной точностью. С помощью электронно-вычислительных машин число π найдено с огромной точностью (несколько тысяч десятичных знаков). Для практических расчетов обычно достаточно трех значащих цифр числа π.

Упражнения

1. Какими свойствами обладает последовательность периметров правильных n-угольников: а) вписанных в окружность; б) описанных около окружности?

2. Радиус окружности равен R. Найдите длину стороны правильного n-угольника: а) вписанного в окружность; б) описанного около окружности.

3. Сформулируйте определение длины окружности.

4. Как изменится длина окружности, если: а) радиус увеличить в три раза; б) диаметр увеличить в три раза; в) диаметр уменьшить в два раза?

5. Какой радиус имеет окружность, длина которой равна π?

6. Диаметр велосипедного колеса равен 70 см. Какое расстояние проехал велосипед, если колесо велосипеда сделало 5000 оборотов?

7. Обхват трубы равен 4,17 м. Вычислите диаметр этой трубы.

8. Радиус окружности $R=1$ м. Вычислите длину ее дуги, величина центрального угла которой равна: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°.

9. Какое из чисел, 3,142 или $\frac{22}{7}$, является более точным приближением числа π?

§ 12. ПОВТОРЕНИЕ

1. Последовательность (y_n) задана формулой $y_n=\frac{n^2+3n+2}{2n^2-n-3}$.

Найдите: y_3, y_{11}, y_{k+1}.

2. **Вычислите первые пять членов последовательности, если:**

а) $a_1=-1,\ a_{n+1}=\frac{1}{2a_n}$; б) $a_1=2,\ a_2=3,\ a_n=3a_{n-2}+a_{n-1}$.

3. Является ли членом последовательности $a_n=3n-2$ число: а) 298; б) 4891; в) 10536; г) 24850? Если является, то каков номер этого члена?

4. Найдите номера членов последовательности $f(n)=5n-47$, для которых $f(n)\leqslant 20$.

5. Напишите формулу, по которой может быть найден любой член бесконечной последовательности (z_n), если известно, что: а) все члены этой последовательности с нечетными номерами равны -8, а с четными 8; б) все члены последовательности с нечетными номерами равны 5, а с четными -5.

6. Объясните, почему числовая последовательность с n-м членом, равным: а) $3n-2$, является арифметической прогрессией; б) $\frac{3}{7}\cdot 2^n$, является геометрической прогрессией.

7*. При каком значении a последовательность $(\sqrt{a};\ \sqrt[3]{a};\ \sqrt[4]{a})$ является геометрической прогрессией?

8. Изобразите графически (двумя способами) последовательности:

а) $u_n=-\frac{1}{n}$; б) $u_n=\frac{2n+3}{n+1}$;

в) $u_n=n-(-1)^n$; г) $u_n=\begin{cases}1+\frac{1}{n}, & \text{если } n \text{ четное,}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{n}, & \text{если } n \text{ нечетное.}\end{cases}$

Имеют ли эти последовательности пределы?

9. Установите свойства числовой последовательности, членами которой являются: а) длины апофем правильных n-угольников; б) величины центральных углов правильных n-угольников; в) величины внутренних углов правильных n-угольников, вписанных в окружность при $n\to\infty$.

10. Выпишите множество, элементами которого служат трехзначные числа, составленные из цифр 1 и 0. Составьте из элементов этого множества последовательности: а) возрастающую; б) убывающую; в) не являющуюся монотонной.

11. Докажите, что последовательность:

а) $a_n=2n^2+3n,\ n\in \mathbf{N}$, возрастает;

б) $x_n=\frac{4n+3}{2n-1},\ n\in \mathbf{N}$, убывает;

в)* $y_n=\frac{1}{E(\sqrt{n})},\ n\in \mathbf{N}$, не возрастает, где $E(x)$ означает наибольшее целое число, не превышающее x, например $E(5)=5$, $E(\pi)=3$.

12* Докажите, что последовательность (a_n), где a_n есть n-я цифра произвольного иррационального числа, не может быть монотонной.

13* Исследуйте на ограниченность последовательность (z_n), если: а) $z_n=\frac{3n+1}{n}$; б) $z_n=5n^2+2$.

14. Последовательность (y_n) задана формулой $y_n=\frac{3n-1}{n}$. При каких натуральных значениях n выполняется условие: а) $|y_n-3|<0{,}1$; б) $|y_n-3|<0{,}001$?

15. Последовательность задана формулой n-го члена $a_n=\frac{n+3}{2n}$. Найдите номера членов этой последовательности, принадлежащих окрестности точки $\frac{1}{2}$ радиуса 0,01.

16. В ε-окрестности точки 5 содержится ровно 1000 членов последовательности (x_n). Можно ли утверждать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=5$?

17. Пользуясь определением предела последовательности, докажите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n-7}{n}=5$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n}=\frac{3}{2}$.

18. Докажите, что при неограниченном увеличении числа сторон правильного n-угольника, вписанного в окружность: а) предел величины его внутреннего угла равен 180°; б) предел величины центрального угла равен 0.

19. Верно ли утверждение: если все члены последовательности — рациональные числа, то и предел ее — рациональное число?

20. Докажите сходимость последовательности $(3;\ \sqrt{3};\ \sqrt[3]{3};\ \dots;\ \sqrt[n]{3};\ \dots)$.

21* Докажите, что для сходимости последовательности (x_n) необходимо, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$.

22. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ и $a>b$. Докажите, что бесконечное число членов последовательности (x_n) больше b.

23. Верно ли, что предел произведения двух последовательностей равен нулю тогда и только тогда, когда предел хотя бы одной из них равен нулю?

24. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+250}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+1}{-2n^2-3n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[5]{n^3}}{n+3}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^4-3n^3+7n^2+1}{n^2-5n-2}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n-4)(n+1)}{n^3+n^2+2}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+3+5+\dots+(2n-1)}$, ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}\right)$.

25. Вычислите $\frac{0,(7)-0,(603)}{1,6(81)}$.

26. Для каких значений x справедливо равенство

$$1-x^2+x^4-x^6+\dots=\frac{1}{1+x^2}?$$

27. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 40, ее знаменатель равен 0,5. Найдите 1-й член прогрессии.

28. Сумма первых четырех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 15. Сумма 1-го и 4-го членов в 1,5 раза больше суммы 2-го и 3-го членов. Найдите предел суммы n первых членов прогрессии при $n\to\infty$.

29. Пусть a_n — сторона правильного n-угольника, описанного около окружности радиуса R. Докажите, что последовательность $(a_4;\ a_8;\ a_{16};\ \dots;\ a_{2^{n+1}};\ \dots)$ является убывающей.

30. Пусть f_n — апофема правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R. Докажите, что последовательность $(f_3;\ f_6;\ f_{12};\ \dots;\ f_{3\cdot 2^{n-1}};\ \dots)$ является сходящейся.

31.* Пусть S_n — площадь правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R. Докажите, что последовательность $(S_3;\ S_6;\ S_{12};\ \dots;\ S_{3\cdot 2^{n-1}};\ \dots)$ является возрастающей и ограниченной сверху.

32. В круг, радиус которого равен R, вписан квадрат, в квадрат вписан круг, в этот круг вписан второй квадрат и т. д. до бесконечности. Найдите сумму площадей всех кругов и сумму площадей всех квадратов.

33. Просмотрите текст главы. Сформулируйте определения основных понятий, введенных в этой главе.

§ 13. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Последовательность задана общим членом: $a_n=2+(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$. Найдите первые пять членов этой последовательности и изобразите их графически.

2. Докажите, что последовательность (x_n), где $x_n=\frac{2+3n}{4}$, является возрастающей.

3. Докажите, что последовательность (y_n), где $y_n=\frac{6n-1}{n}$, является ограниченной.

4. Докажите, что последовательность (a_n), где $a_n=5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, является убывающей.

5. Вычислите: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n-1}{n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^2+3}{2n^2-3n+5}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+2n}{2n^2+7}$.

6. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии: 6; -2; $\frac{2}{3}$; $-\frac{2}{9}$; ... .

7. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n), если $b_3=\frac{5}{2}$, $q=\frac{1}{2}$.

8. Представьте в виде обыкновенной дроби следующие периодические десятичные дроби: 4,(7); 0,1(23).

9. В правильный треугольник с длиной стороны a вписана окружность. В эту окружность вписан правильный треугольник. В полученный треугольник вновь вписана окружность и т. д. до бесконечности. Найдите сумму длин всех окружностей.

Глава III.

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНАЯ

§ 14. ПОНЯТИЕ О ПРЕДЕЛЕ ФУНКЦИИ

Понятие предела функции является одним из ведущих понятий математики. Прежде чем определить это понятие, рассмотрим пример. Пусть дана функция $f(x)=2x+3$. График этой функции изображен на рисунке 23,*а*. Выберем некоторую последовательность (x_n) значений аргумента x, стремящуюся к числу 2, например последовательность $x_n=2+\frac{1}{n}$, и выясним, к какому числу будет стремиться последовательность соответствующих значений функции.

Запишем соответствующие значения аргумента и функции в таблицу:

(x_n)	3	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{4}$	...	$2\frac{1}{10}$	...	$2\frac{1}{100}$	...	$2+\frac{1}{n}$	$x_n\to 2$
$(f(x_n))$	9	8	$7\frac{2}{3}$	$7\frac{1}{2}$	...	$7\frac{1}{5}$	...	$7\frac{1}{50}$	...	$7+\frac{2}{n}$	$f(x_n)\to 7$

Из таблицы видно, что при приближении значений аргумента к числу 2 соответствующие значения функции приближаются к числу 7.

Можно доказать, что независимо от того, каким образом x стремится к 2, функция $f(x)$ стремится к 7. Выбор последовательности $x_n=2+\frac{1}{n}$ был произвольным и определялся лишь желанием изобразить стремление аргумента к числу 2 просто и наглядно. Естественно считать число 7 пределом функции $f(x)=2x+3$ при x, стремящемся к 2, что записывают так: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)=7$.

Для более глубокого понимания смысла этого утверждения докажем, что для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно указать некоторый промежуток, содержащий точку 2, для каждой точки которого выполняется неравенство $|f(x)-7|<\varepsilon$:

$$|f(x)-7|=|(2x+3)-7|=|2x-4|=2|x-2|<\varepsilon.$$

Откуда $|x-2|<\frac{\varepsilon}{2}$; $-\frac{\varepsilon}{2}<x-2<\frac{\varepsilon}{2}$; $2-\frac{\varepsilon}{2}<x<2+\frac{\varepsilon}{2}$; $x\in\left]2-\frac{\varepsilon}{2};\ 2+\frac{\varepsilon}{2}\right[$.

Таким образом, для каждой точки промежутка $\left]2-\frac{\varepsilon}{2};\ 2+\frac{\varepsilon}{2}\right[$ выполняется неравенство $|f(x)-7|<\varepsilon$, т. е. соответствующие значения функции попадают в промежуток $]7-\varepsilon;\ 7+\varepsilon[$. Проиллюстрируем полученный результат геометрически (рис. 23, *б*).

Если, например, $\varepsilon=0{,}1$, то

$$x\in\left]2-\frac{0{,}1}{2};\ 2+\frac{0{,}1}{2}\right[,\ \text{т. е. } x\in\,]1{,}95;\ 2{,}05[;$$

$$f(x)\in\,]7-0{,}1;\ 7+0{,}1[,\ \text{т. е. } f(x)\in\,]6{,}9;\ 7{,}1[.$$

Выше было получено, что $|x-2|<\frac{\varepsilon}{2}$. Обозначим $\frac{\varepsilon}{2}$ через δ. Тогда доказанное выше утверждение можно сформулировать так: для любого x, удовлетворяющего неравенству $|x-2|<\delta$, будет справедливо неравенство $|f(x)-7|<\varepsilon$. Сформулируем теперь определение предела функции в точке a.

Определение. **Число b называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого положительного числа ε можно найти такое положительное число δ, что при всех $x\neq a$ и удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$ выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.**

Это определение предела проиллюстрировано на рисунке 24. Для любого значения x из δ-окрестности точки a соответствующее значение функции $f(x)$ принадлежит ε-окрестности точки b.

Пример 1. Дано $f(x)=3x-1$. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 1}(3x-1)=2$.

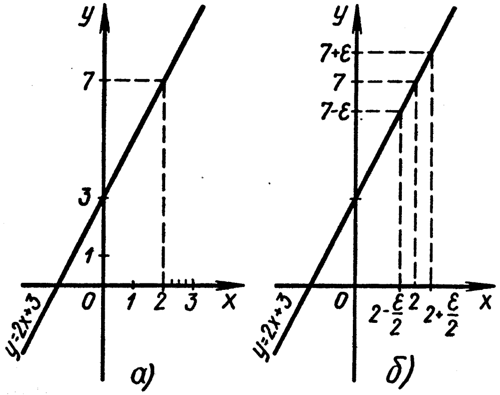


Рис. 23

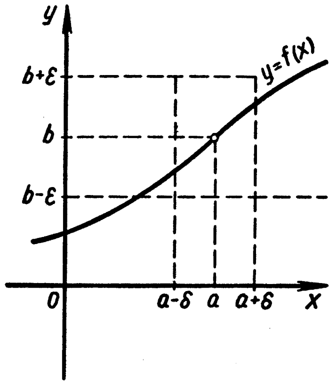


Рис 24

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. Составим модуль разности: $|f(x)-2|=|(3x-1)-2|=|3x-3|=3|x-1|<\varepsilon$. Получим $|x-1|<\frac{\varepsilon}{3}$. Обозначим $\frac{\varepsilon}{3}=\delta$. Тогда для любого x, удовлетворяющего неравенству $|x-1|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-2|<\varepsilon$. По определению предела функции в точке $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

Пример 2. Дано $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$. Рассмотрим модуль разности:

$$|f(x)-4|=\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|=\left|\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}-4\right|.$$

Дробь, содержащуюся под знаком модуля, можно сократить на $x-2$, так как $x-2\neq 0$. Получим: $|f(x)-4|=|(x+2)-4|=|x-2|<\varepsilon$ при $x\neq 2$.

Если считать, что $\delta=\varepsilon$, то для любого $x\,(x\neq 2)$, удовлетворяющего неравенству $|x-2|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-4|<\varepsilon$. По определению предела функции в точке имеем: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$.

Проиллюстрируем полученный результат геометрически. Функция $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ определена на множестве действительных чисел, исключая точку 2. $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=x+2$, $x\neq 2$, поэтому график данной функции может быть получен из графика функции $f(x)=x+2$, если исключить из нее точку (2; 4) (рис. 25). Таким образом, неравенство $|f(x)-4|<\varepsilon$ выполняется для любых x, принадлежащих δ-окрестности точки 2, кроме $x=2$.

Этот пример иллюстрирует следующий факт из приведенного выше определения предела функции: неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$ выполняется для любых x из δ-окрестности точки a, кроме $x=a$.

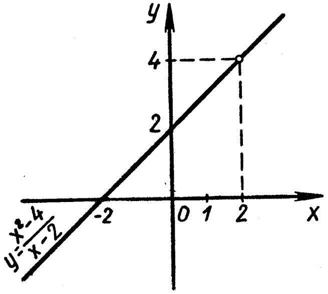


Рис. 25

Пример 3. Дано $f(x)=x$. Докажите, что $\lim\limits_{x\to a} x=a$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ — произвольное действительное число. Составим модуль разности: $|f(x)-a|=|x-a|<\varepsilon$. Если считать $\delta=\varepsilon$, то для любого x, удовлетворяющего неравенству $|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$, т. е. $|x-a|<\varepsilon$. По определению предела функции в точке имеем: $\lim\limits_{x\to a} x=a$

Пример 4. $f(x)=k$, где k — данное число. Докажите, что $\lim\limits_{x\to a} k=k$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ — произвольное действительное число. Модуль разности $|f(x)-k|=|k-k|=0<\varepsilon$ при любых значениях x из любой δ-окрестности точки a. Это означает, что $\lim\limits_{x\to a} k=k$ при стремлении x к любому числу.

Например, $\lim\limits_{x\to 7} 5=5$, $\lim\limits_{x\to 0}(-3)=-3$.

▶ Часто приходится рассматривать односторонние пределы функции в точке — предел справа и предел слева. Определение правостороннего (левостороннего) предела функции в точке a отличается от приведенного выше определения предела лишь тем, что условие $x\neq a$ заменяется условием $x>a$ (или $x<a$). ◀

Упражнения

1. Составьте конспект параграфа.
2. Постройте график функции $f(x)=2x+5$. Используя график, объясните смысл равенства $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=3$.
3. Докажите:

а) $\lim\limits_{x\to 2} 5x=10$;	б) $\lim\limits_{x\to 3} 6=6$;
в) $\lim\limits_{x\to 3}(x+7)=10$;	г) $\lim\limits_{x\to 2}(-2x+3)=-1$;
д) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}=-6$;	е) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}=1$.

§ 15. ПОНЯТИЕ О НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ

Рассмотрим функции

$$f(x)=2x+1 \text{ и } \varphi(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1}, \text{ если } x\neq 1,\\ 4, \text{ если } x=1.\end{cases}$$

Графики этих функций приведены соответственно на рисунках 26 и 27. Каждая из этих функций определена на множестве всех действительных чисел. Говорят, что первая из них непрерывна в точке $x=1$, а вторая в этой точке терпит разрыв. Уточним смысл этих понятий. Найдем пределы этих функций при x, стремящемся к 1:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(2x+1)=3;\ \lim_{x\to 1}\varphi(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

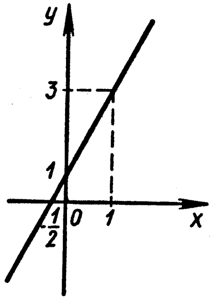


Рис. 26

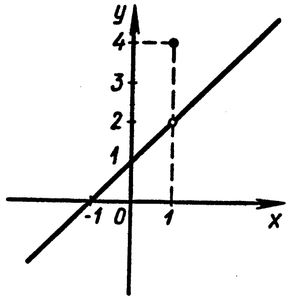


Рис. 27

(Доказательства проведите самостоятельно.)

Вычислим значения данных функций в точке 1: $f(1)=3$; $\varphi(1)=4$. Получили, что $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$, а $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)\neq\varphi(1)$, т. е. в первом случае предел функции в точке равен ее значению в этой точке, а во втором — предел функции не равен ее значению в рассматриваемой точке.

Определение. **Функция называется непрерывной в точке, если ее предел и значение в этой точке равны.**

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке a.

Например, функции $y=3x+8$; $y=x^2$; $y=|x|$ непрерывны в каждой точке области определения. Функция $y=\frac{1}{x}$ также непрерывна в каждой точке области своего определения, хотя график ее состоит из двух отдельных ветвей, потому что в точке $x=0$ эта функция не определена.

Функцию, непрерывную в каждой точке числового множества, называют непрерывной на этом множестве.

Пример 1. Докажите, что функция $f(x)=x+5$ в точке $x=2$ непрерывна.

Доказательство. Заметим, что $D(f(x))$[1] $=\mathbf{R}$ и $2\in D(f)$.

1. Найдем $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x+5)=7$. Действительно, $|f(x)-7|=$

---

[1] Символом $D(f(x))$ или иногда короче $D(f)$ мы будем обозначать область определения функции $f(x)$.

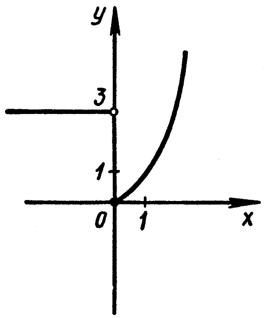


Рис. 28

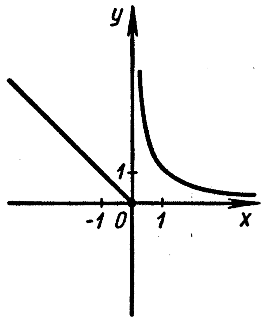


Рис 29

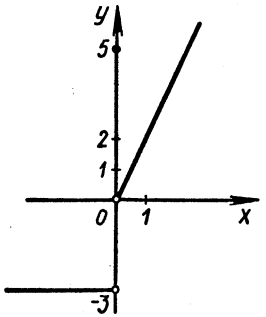


Рис. 30

$=|(x+5)-7|=|x-2|<\varepsilon$, $\varepsilon=\delta$. Тогда при $|x-2|<\delta$ выполняется неравенство $|f(x)-7|<\varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=7$.

2. Найдем $f(2)=2+5=7$.

Получили $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$. По определению непрерывности функции в точке функция $f(x)=x+5$ непрерывна в точке $x=2$.

Заметим, что одним из условий непрерывности функции $f(x)$ в точке $x=a$ является существование предела $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Приведем примеры разрывных функций.

Рассмотрим функции:

$$1)\ f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 0,\\ 3, & x<0;\end{cases}\qquad 2)\ \varphi(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & x>0,\\ -x, & x\leqslant 0;\end{cases}$$

$$3)\ g(x)=\begin{cases} 2x, & x>0,\\ 5, & x=0,\\ -3, & x<0.\end{cases}$$

Каждая из данных функций определена на множестве всех действительных чисел, в том числе и в точке 0. Графики этих функций приведены соответственно на рисунках 28—30.

Однако каждая из них в точке $x=0$ терпит разрыв (объясните почему).

Рассмотрим еще два примера разрывных функций.

Пример 2. Рассмотрим функцию $y=[x]$. Выражение $[x]$ обозначает целую часть числа x — наибольшее целое число, не превосходящее данное число. Например, $[2{,}3]=2$; $[7{,}85]=7$; $[5]=5$; $[-1{,}8]=-2$; $[-9{,}1]=-10$. График функции $y=[x]$ изображен на рисунке 31. Например, если $x\in[0;\ 1[$, то $y=0$; если $x\in[1;\ 2[$, то $y=1$; если $x\in[-2;\ -1[$, то $y=-2$. Таким образом, функция $y=[x]$, определенная на множестве всех действительных чисел, имеет бесконечное множество точек разрыва. Каждое целое число есть точка разрыва этой функции.

Пример 3. Рассмотрим функцию $y=\{x\}$, обозначающую дробную часть числа x. Она определяется как разность числа x

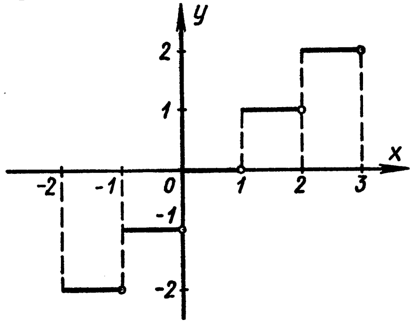


Рис. 31

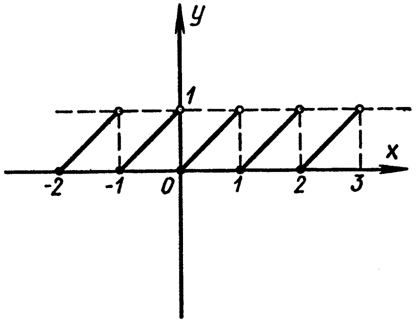


Рис. 32

и его целой части: $\{x\} = x - [x]$. Например, $\{0{,}13\} = 0{,}13$; $\{7{,}5\} = 0{,}5$; $\{-2{,}3\} = -2{,}3 - (-3) = 0{,}7$; $\{-7{,}25\} = -7{,}25 - (-8) = 0{,}75$; $\{8\} = 0$. График функции $y = \{x\}$ изображен на рисунке 32. Например, если $x \in [0;\ 1[$, то $y = x$; если $x \in [1;\ 2[$, то $y = x - 1$; если $x \in [-1;\ 0[$, то $y = x - (-1) = x + 1$.

Таким образом, функция $y = \{x\}$, определенная на множестве всех действительных чисел, имеет бесконечное множество точек разрыва. Каждое целое число есть точка разрыва этой функции.

Упражнения

1. Поясните на примере понятие непрерывности функции в точке.

2. На рисунках 33—35 изображены графики функций, заданных на промежутке $[a;\ b]$. Для каждой из них ответьте на следующие вопросы: а) является ли функция непрерывной в точке $x = 1$; б) имеет ли функция предел при $x \to 1$?

3. Схематически изобразите график какой-либо функции, обладающей свойствами: а) при $x \to 1$ функция имеет предел, равный 2, но в точке $x = 1$ функция не является непрерывной; б) значение функции в точке $x = 1$ равно 3, но предел в этой точке не существует.

4. Верны ли утверждения: а) если функция непрерывна в точке x_0, то она имеет предел в этой точке; б) если функция имеет предел в точке x_0, то она непрерывна в этой точке?

5. Какие из функций, графики которых изображены на рисунках 36—40, непрерывны и какие разрывны в точке 0?

6. Докажите непрерывность функций:

а) $f(x) = 7 - 3x$ в точке $x = 1$;

б*) $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ в точке $x = 2$;

в*) $\psi(x) = x^2$ в точке $x = 1$.

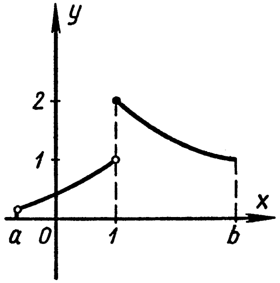


Рис. 33

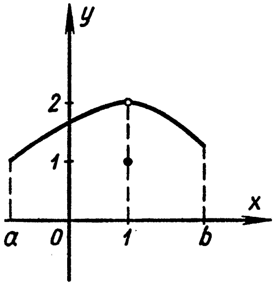


Рис. 34

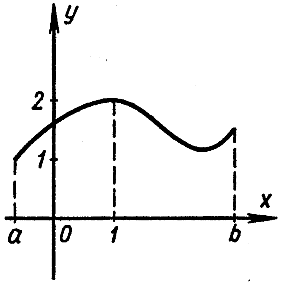


Рис. 35

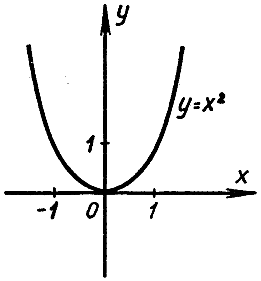


Рис. 36

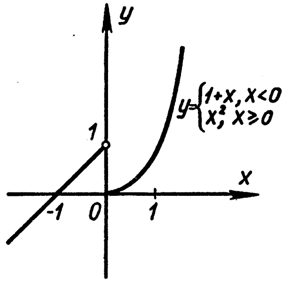


Рис. 37

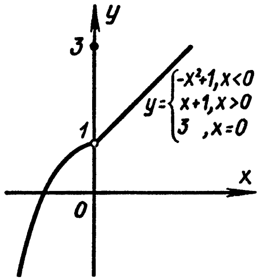


Рис. 38

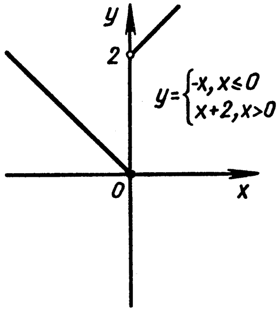


Рис. 39

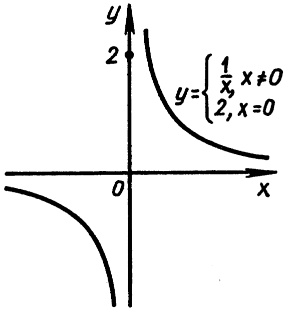


Рис. 40

7*. Может ли сумма двух функций, каждая из которых имеет бесконечное множество точек разрыва, быть непрерывной на всей числовой прямой?

§ 16. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ

Основные теоремы о пределах функций аналогичны соответствующим теоремам о пределах последовательностей. Ограничимся только формулировкой этих теорем и показом их применения.

Теорема 1. ***Если функция $f(x)$ при x, стремящемся к a, имеет предел, то он единственный.***

Теорема 2. ***Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют пределы при x, стремящемся к a, то сумма (разность) этих функций также имеет предел при x, стремящемся к a, равный сумме (разности) пределов данных функций:***

$$\lim_{x \to a} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} \varphi(x).$$

Теорема 3. ***Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют пределы при x, стремящемся к a, то произведение этих функций также имеет***

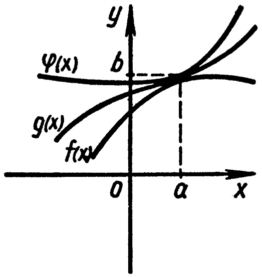


Рис. 41

предел при x, стремящемся к a, равный произведению пределов данных функций:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot\varphi(x))=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}\varphi(x).$$

Следствие. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела:*

$$\lim_{x\to a}(c\cdot f(x))=c\cdot\lim_{x\to a}f(x).$$

Действительно:

$$\lim_{x\to a}(c\cdot f(x))=\lim_{x\to a}c\cdot\lim_{x\to a}f(x)=c\cdot\lim_{x\to a}f(x).$$

Можно доказать, что теоремы 2 и 3 верны для суммы и произведения любого конечного числа функций, имеющих пределы при x, стремящемся к a.

Теорема 4. ***Предел частного двух функций при x, стремящемся к a, равен частному пределов этих функций, если последние существуют при x, стремящемся к a, и предел делителя отличен от нуля:***

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)},\ \textit{если}\ \lim_{x\to a}\varphi(x)\neq 0.$$

Теоремы 2—4 применяются при нахождении пределов функций.

Теорема 5. ***Если функции $f(x)$, $\varphi(x)$, $g(x)$ таковы, что $f(x)\leqslant g(x)\leqslant\varphi(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$, то $\lim\limits_{x\to a}g(x)=b$.***

Справедливость этого факта проиллюстрирована на рисунке 41. Здесь график функции $g(x)$ расположен между графиками функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ так, что $f(x)\leqslant g(x)\leqslant\varphi(x)$. Пределы функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x\to a$ совпадают и равны b, поэтому $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ также равен b.

Пример 1. Найдите $\lim\limits_{x\to 2}(5x-12)$.

Решение. Применяя теоремы о пределах, получим: $\lim\limits_{x\to 2}(5x-12)=\lim\limits_{x\to 2}5x-\lim\limits_{x\to 2}12=5\lim\limits_{x\to 2}x-12=5\cdot 2-12=-2$.

Пример 2. Найдите $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x-3}{2x+8}$.

Решение. Найдем $\lim\limits_{x\to 1}(2x+8)=\lim\limits_{x\to 1}2x+\lim\limits_{x\to 1}8=2\lim\limits_{x\to 1}x+8=2\cdot 1+8=10\neq 0.$

Поэтому можно воспользоваться теоремой 4:

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x-3}{2x+8}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(5x-3)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x+8)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}5x-\lim\limits_{x\to 1}3}{10}=$$

$$=\frac{5\lim\limits_{x\to 1}x-3}{10}=\frac{5\cdot 1-3}{10}=\frac{1}{5}.$$

Упражнения

1. Сформулируйте основные теоремы о пределах функций и запишите их в символической форме.

2. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to -1}(3x+4)$; б) $\lim\limits_{x\to 10}(-2x+1)$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{4x-1}{2-3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0{,}5}\frac{4x-2}{2x+3}$.

3. Может ли функция иметь два различных предела при стремлении аргумента к одному и тому же числу?

4. Известно, что $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)=2$; $\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)=-2$. Найдите:

а) $\lim\limits_{x\to x_0}(f_1(x)\pm f_2(x))$; б) $\lim\limits_{x\to x_0}(f_1(x)\cdot f_2(x))$; в) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$.

5*. Докажите теорему 1 о единственности предела функции.

6*. Докажите теорему 2 о пределе суммы двух функций.

§ 17. ПРЕДЕЛ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

В этом параграфе мы научимся находить пределы степенных функций с натуральным показателем. Напомним, что степенной функцией с натуральным показателем называют функцию вида $f(x)=x^n$, где $n\in\mathbf{N}$.

Например, $f(x)=x$; $f(x)=x^2$; $f(x)=x^5$.

Областью определения степенной функции является множество действительных чисел.

Напомним также, что $\lim\limits_{x\to a}x=a$ (см. § 14).

Верна теорема:

Теорема. $\lim\limits_{x\to a}x^n=a^n$, ***где $n\in\mathbf{N}$, $a\in\mathbf{R}$.***

Доказательство этой теоремы мы не приводим.

Из теоремы следует, что степенная функция с натуральным показателем непрерывна на множестве всех действительных чисел (см. определение непрерывной функции, § 15).

Пример 1. Найдите $\lim\limits_{x\to 4}x^2$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 4}x^2=4^2=16$.

Пример 2. Найдите $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-5x+1)$.

Решение. Воспользуемся теоремами о пределах:

$$\lim_{x\to 1}(3x^2-5x+1)=\lim_{x\to 1}(3x^2)-\lim_{x\to 1}5x+\lim_{x\to 1}1=$$

$$=3\lim_{x\to 1}x^2-5\lim_{x\to 1}x+1=3\cdot 1^2-5\cdot 1+1=-1.$$

Упражнения

1. Докажите, что функция $f(x)=x^n$, где $n \in N$, непрерывна на множестве всех действительных чисел.

2. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2} x^3$; б) $\lim\limits_{x\to -1}(2x^4)$;

в) $\lim\limits_{x\to -5}(3x-1)$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-2x^2+7x-5)$.

3. Докажите, что линейная функция $f(x)=kx+b$ непрерывна на множестве всех действительных чисел.

§ 18. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе мы будем находить пределы рациональных функций. Рациональные функции могут быть представлены в виде многочлена (целая рациональная функция) или в виде частного двух многочленов (дробно-рациональная функция).

Многочлен n-й степени в общем виде записывают так:

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — действительные числа ($a_0 \neq 0$), называемые коэффициентами многочлена. Например, $P(x)=3x^2+3x-1$ — многочлен второй степени; $P(x)=5x^3-2x+1$ — многочлен третьей степени; $P(x)=2x$ — многочлен первой степени.

Областью определения многочлена является множество всех действительных чисел.

Дробно-рациональная функция может быть записана так: $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены. Например, $S(x)=\frac{2x^2-1}{4x^3+4x-5}$.

Областью определения дробно-рациональной функции является множество действительных чисел, при которых многочлен, стоящий в знаменателе, не обращается в нуль.

Теорема 1. ***Предел многочлена $P(x)$ при x, стремящемся к a, где a — любое действительное число, равен значению этого многочлена в точке $x=a$.***

Доказательство. Доказательство основано на применении основных теорем о пределах функций и теоремы о пределе степенной функции.

$$\lim_{x\to a}P(x)=\lim_{x\to a}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n)=$$

$$=\lim_{x\to a}(a_0x^n)+\lim_{x\to a}(a_1x^{n-1})+\lim_{x\to a}(a_2x^{n-2})+\ldots+\lim_{x\to a}(a_{n-1}x)+$$

$$+\lim_{x\to a}a_n=a_0\lim_{x\to a}x^n+a_1\lim_{x\to a}x^{n-1}+a_2\lim_{x\to a}x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\lim_{x\to a}x+$$

$$+a_n=a_0a^n+a_1\cdot a^{n-1}+a_2a^{n-2}+\ldots+a_{n-1}a+a_n=P(a).$$

Теорема доказана.

Таким образом доказано, что многочлен — непрерывная функция на множестве действительных чисел.

Пример 1. Найдите $\lim\limits_{x\to -2}(2x^3-7x^2+x-5)$.

Решение. Теперь при решении задач на нахождение предела многочлена при $x\to a$ можно сразу вычислять его значение в точке a.

$$\lim_{x\to -2}(2x^3-7x^2+x-5)=2(-2)^3-7\cdot(-2)^2+(-2)-$$

$$-5=-51.$$

Теорема 2. ***Предел дробно-рациональной функции $S(x)$ при x, стремящемся к a, принадлежащему ее области определения, равен значению данной функции в точке a.***

Доказательство. Пусть $S(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены. Докажем, что $\lim\limits_{x\to a}S(x)=S(a)$, где $a \in D(S(x))$.

$$\lim_{x\to a}S(x)=\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}P(x)}{\lim\limits_{x\to a}Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}=S(a).$$

Следствие. *Дробно-рациональная функция непрерывна на всей области своего определения.*

Пример 2. Найдите $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-7x+3}{2x-1}$.

Решение. Число 2 принадлежит области определения данной функции, так как при $x=2$ многочлен, стоящий в знаменателе, отличен от нуля. Поэтому $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-7x+3}{2x-1}=\frac{2^3-7\cdot 2+3}{2\cdot 2-1}=-1$.

Пример 3. Найдите $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-1}$.

Решение. Число 1 не принадлежит области определения функции $\frac{x^2-x}{x^2-1}$, поэтому теоремой 2 непосредственно воспользоваться нельзя.

Замечаем, что $\frac{x^2-x}{x^2-1}=\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x}{x+1}$. Дробь можно сократить на $x-1\neq 0$, так как $x\neq 1$. Предел заданной функции будет совпадать с пределом функции $\frac{x}{x+1}$. Предел же функции

$\frac{x}{x+1}$ при $x \to 1$ может быть найден по теореме 2. Таким образом,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Получили, что, хотя функция $\frac{x^2-x}{x^2-1}$ не определена в точке $x=1$, она в этой точке имеет предел, равный $\frac{1}{2}$.

Пример 4. Найдите $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$.

Решение. Если $x=2$, то $x^2-x-2=2^2-2-2=0$. Разложим квадратные трехчлены, стоящие в числителе и знаменателе данной дроби, на множители:

$x^2-5x+6=0;$	$x^2-x-2=0;$
$x=3$ или $x=2;$	$x=2$ или $x=-1;$
$x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$	$x^2-x-2=(x-2)(x+1).$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x+1}=\frac{2-3}{2+1}=-\frac{1}{3}.$$

Упражнения

1. Приведите примеры целых и дробно-рациональных функций.

2. Найдите область определения функций:

а) $f(x)=2x^2-3;$ б) $\varphi(x)=\frac{2x-1}{x+3};$

в) $g(x)=\frac{x+1}{2x^2+x-1};$ г) $h(x)=\frac{x^2-4}{x^2+x-6}.$

3. Сформулируйте и запишите символически теоремы о пределе целой и дробно-рациональной функций.

4. Докажите, что дробно-рациональная функция непрерывна на всей области своего определения.

5. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 4}(2x+3);$ б) $\lim\limits_{x\to 1}(x^3-5x^2-2x+3);$ в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{x-3};$

г) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x+7}{5-x};$ д) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1};$ е) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2+3x-10}{x^2-25};$

ж) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3};$ з) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2+x-12}{x^2+2x-8};$ и) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{x^2-1}.$

§ 19. ПОНЯТИЕ О ПРИРАЩЕНИИ АРГУМЕНТА И ПРИРАЩЕНИИ ФУНКЦИИ

Поведение функции (ее возрастание, убывание, средняя скорость изменения) может быть охарактеризовано путем сравнения разности значений аргумента с разностью соответствующих значений функции. Покажем это на примерах. Вначале введем два определения.

Определение 1. **Функция $y=f(x)$ называется возрастающей на промежутке D, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку, из условия $x_2>x_1$ следует, что $f(x_2)>f(x_1)$.**

Определение 2. **Функция $y=f(x)$ называется убывающей на промежутке D, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку, из условия $x_2>x_1$ следует $f(x_2)<f(x_1)$.**

Пример 1. Дана функция $f(x)=x^2$. Докажите, что функция возрастает на промежутке $[0;\ \infty[$.

Решение. Рассмотрим два любых значения аргумента x_1 и x_2, принадлежащие данному промежутку. Пусть $x_2>x_1$. Докажем, что $f(x_2)>f(x_1)$. Найдем знак разности значений функции: $f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2+x_1)(x_2-x_1)>0$; так как $x_2+x_1>0$ и $x_2-x_1>0$, значит $f(x_2)>f(x_1)$. По определению 1 данная функция возрастает на промежутке $[0;\ \infty[$.

Задание 1. Докажите, что функция $f(x)=x^2$ убывает на промежутке $]-\infty;\ 0]$.

Рассмотрим функцию $y=f(x)$. Пусть x и x_1 — два значения аргумента из области ее определения, тогда $f(x)$ и $f(x_1)$ — соответствующие значения функции (рис. 42).

Разность x_1-x двух значений аргумента называют приращением аргумента в точке x и обозначают Δx (читается: «дельта x»): $\Delta x=x_1-x$.

Разность соответствующих значений функции $f(x_1)-f(x)$ называют приращением данной функции в точке x и обозначают $\Delta f(x)$ (читается: «дельта эф от икс»): $\Delta f(x)=f(x_1)-f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$ (см. рис. 42).

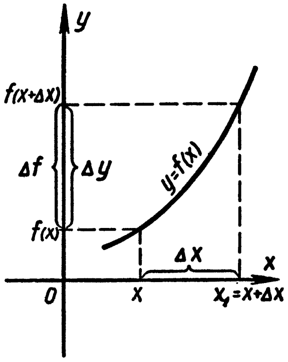


Рис. 42

Приращение аргумента и приращение функции в точке могут быть числами положительными, отрицательными и нулем.

Рассмотрим вычисление приращения функции на примере.

Дана функция $f(x)=x^2$. На рисунке 43 изображен ее график. Пусть $x=1$ — первоначальное значение аргумента. По оси абсцисс продвинемся вправо от точки $x=1$ до точки $x_1=1{,}5$. В этом случае аргумент в точке $x=1$ получил приращение $\Delta x=1{,}5-1=0{,}5$. Вычислим со-

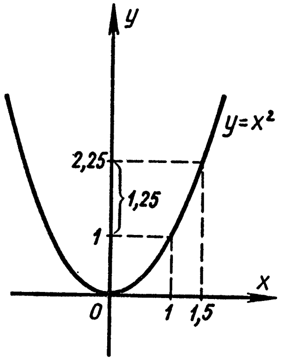


Рис. 43

ответствующие значения функции: $f(1)=1$ и $f(1{,}5)=2{,}25$. Приращение функции в точке $x=1$ будет $\Delta f(1)=f(1{,}5)-f(1)=$ $=2{,}25-1=1{,}25$.

Понятие приращения функции часто применяется в физике (приращение времени Δt, температуры ΔT, работы ΔA и т. п.).

Приращение функции в заданной точке x, соответствующее приращению аргумента Δx, находят следующим образом:

1) находят значение $x+\Delta x$;
2) вычисляют значение $f(x)$;
3) вычисляют значение $f(x+\Delta x)$;
4) находят приращение функции $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$.

Пример 2. Найдите приращение функции $f(x)=x^2-x+5$ в точке $x=1$, если $\Delta x=0{,}2$.

Решение. 1. $x+\Delta x=1+0{,}2=1{,}2$.
2. $f(1)=1^2-1+5=5$.
3. $f(1{,}2)=1{,}2^2-1{,}2+5=5{,}24$.
4. $\Delta y=f(1{,}2)-f(1)=5{,}24-5=0{,}24$.

Задание 2. Докажите, что функция $f(x)=ax+b$ при $a>0$ возрастает на всей области ее определения.

Задание 3. Докажите, что функция $f(x)=ax+b$ при $a<0$ убывает на всей области ее определения.

Упражнения

1. Повторите основные определения и правила, содержащиеся в параграфе.

2. Найдите приращение аргумента при переходе от точки x к точке x_1, если:
а) $x=3$, $x_1=3{,}7$; б) $x=2$, $x_1=1{,}7$; в) $x=7$, $x_1=5{,}8$.

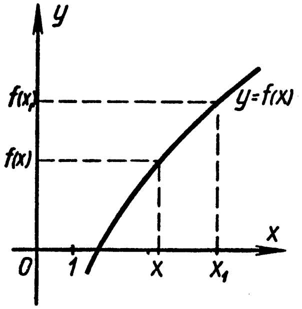


Рис. 44

3. Дана функция $y=3x-7$. Найдите Δy, если: а) $x=3$, $\Delta x=-0{,}4$; б) $x=$ $=-1{,}6$, $\Delta x=0{,}7$.

4. Дана функция $f(x)=-5x+2$. Найдите $\Delta f(x)$, если: а) $x=2$, $\Delta x=0{,}6$; б) $x=-3{,}2$, $\Delta x=-0{,}1$.

5. Запишите приращение функции в точке x, соответствующее приращению аргумента Δx, если: а) $f(x)=3x+2$; б) $\varphi(x)=x^2-5x$; в) $h(x)=\frac{1}{x+2}$; г) $s(x)=3\sqrt{x-4}$.

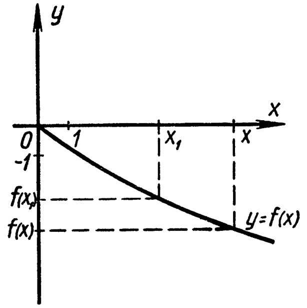


Рис. 45

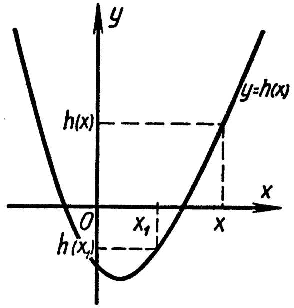


Рис. 46

6. По рисункам 44, 45, 46 установите знаки значений приращений аргумента и функции при переходе от точки x к точке x_1.

7. Найдите $f(x+\Delta x)$, $f(x+\Delta x)-f(x)$, $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ для функций:
а) $f(x)=3x+5$; б) $f(x)=-2x^2$.

8. Докажите, что функция $y=\frac{6}{x}$ убывает на промежутке $]0;\ \infty[$.

9. Докажите, что функция $y=2x^2+3$ убывает на промежутке $]-\infty;\ 0]$.

10. Докажите, что функция $y=-3x^2$ возрастает на промежутке $]-\infty;\ 0]$.

11*. Докажите, что функция $y=\sqrt{x}$ возрастает на всей области ее определения.

12. Диаметр диска измерен с погрешностью в 1%. По этому приближенному значению вычислена площадь диска. Докажите, что при вычислении площади допущена погрешность, не превосходящая 2%.

13. Ребро куба измерено с погрешностью в 1%. Докажите, что объем куба, вычисленный с указанной погрешностью, приводит к погрешности, составляющей 3% объема куба.

14. Найдите промежутки возрастания и убывания функций:
а) $f(x)=|x-1|$; б) $f(x)=x^2+1$.

§ 20. СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ ФУНКЦИИ

Изучение различных процессов (механического движения, химических реакций, расширения жидкости при нагревании, течения электрического тока и др.) приводит к необходимости вычисления скорости изменения функций.

Рассмотрим примеры.

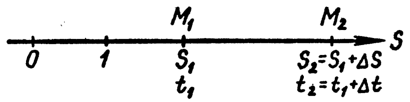


Рис. 47

Средняя скорость прямолинейного движения материальной точки.

Пусть материальная точка M движется по прямой, на которой указано начало отсчета (точка O), направление движения и единица измерения длин (рис. 47). В начале движения при $t=0$ материальная точка занимала положение O. Через промежуток времени t_1 точка заняла положение M_1. Через промежуток времени t_2 от начала движения она заняла положение M_2.

Таким образом, каждому моменту времени t соответствует определенная координата S материальной точки M. (В нашем примере эта координата совпадает с величиной пути, пройденного материальной точкой.) Поэтому положение материальной точки, движущейся по прямой, есть функция времени t: $s=f(t)$, $t \geqslant 0$.

Движение считается заданным, если известна функция f, которая позволяет определить положение движущейся точки в любой момент времени t.

Функцию f называют законом движения точки M, а равенство $s=f(t)$ — уравнением движения.

Для характеристики изменения пути со временем служит понятие скорости. Средняя скорость движения точки есть отношение пройденного пути ко времени его прохождения. Если $s_1=f(t_1)$, $s_2=f(t_2)$ (рис. 47), то

$$\text{на участке } OM_1\text{:} \quad v_{\text{ср}}=\frac{s_1}{t_1}=\frac{f(t_1)}{t_1};$$

$$\text{на участке } OM_2\text{:} \quad v_{\text{ср}}=\frac{s_2}{t_2}=\frac{f(t_2)}{t_2};$$

$$\text{на участке } M_1M_2\text{:} \quad v_{\text{ср}}=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}=\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}.$$

Пусть Δt — приращение времени, а Δs — соответствующее приращение пути, тогда $t_2=t_1+\Delta t$, $s_2=s_1+\Delta s$ и на участке $M_1\ M_2$ средняя скорость $v_{\text{ср}}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$. При равномерном движении $v_{\text{ср}}$ постоянно на любом участке пути: $\frac{s_1}{t_1}=\frac{s_2}{t_2}=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Если на разных участках пути средняя скорость движения будет различной, то движение называется неравномерным. При неравномерном движении нельзя говорить о скорости движения, не указывая того участка пути, для которого эта скорость вычислена.

На практике поезда, самолеты, автомобили, корабли движутся, как правило, неравномерно.

При эксплуатации транспорта средней скоростью характеризуют и неравномерное движение, однако она не дает точного представления о быстроте движения на отдельных участках пути. Решение многих вопросов техники связано с понятием мгновенной скорости. Точные расчеты в теории высшего пилотажа, в ракетной технике, в баллистике требуют знания скорости движения в любой наперед заданный момент времени. В связи с этим возникает необходимость понятия скорости в данный момент времени, т. е. мгновенной скорости.

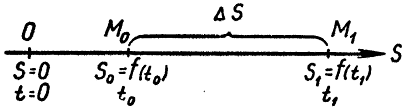


Рис. 48

Точное определение понятия мгновенной скорости основано на том факте, что движение материальной точки в течение небольшого промежутка Δt времени мало чем отличается от равномерного. Это отличие тем меньше, чем меньше промежуток Δt времени, т. е. определение понятия мгновенной скорости связано с понятием предела.

Мгновенная скорость прямолинейного движения материальной точки.

Пусть материальная точка M движется прямолинейно по закону $s=f(t)$ (рис. 48). В момент времени t_0 она заняла положение M_0 и прошла путь $s_0=f(t_0)$. Найдем скорость точки в момент времени t_0.

Допустим, что за произвольно выбранный промежуток времени Δt, начиная с момента t_0, точка продвинулась на расстояние Δs и заняла положение M_1. Тогда $t_1=t_0+\Delta t$, $s_1=f(t_1)=s_0+\Delta s$.

За промежуток времени Δt материальная точка проходит путь

$$\Delta s=f(t_1)-f(t_0)=f(t_0+\Delta t)-f(t_0).$$

Средняя скорость $v_{\text{ср}}$ движения на участке M_0M_1 равна:

$$v_{\text{ср}}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}.$$

Эта величина дает лишь примерное представление о скорости движения материальной точки на рассматриваемом промежутке. Это представление будет тем точнее, чем меньше промежуток времени Δt.

Таким образом, можно считать, что при Δt, стремящемся к нулю, средняя скорость точки $v_{\text{ср}}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$ будет приближаться к скорости в момент времени t_0.

Мгновенной скоростью прямолинейно движущейся точки в момент времени t_0 называется предел средней скорости при Δt, стремящемся к нулю:

$$v_{\text{мгн}}=\lim_{\Delta t\to 0} v_{\text{ср}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}.$$

Итак, мгновенная скорость прямолинейно движущейся точки есть предел отношения приращения пути Δs к соответствующему приращению времени Δt, когда приращение времени стремится к нулю.

Пример 1. Точка движется прямолинейно по закону $s(t)=3t^2-4t+2$. Найдите: а) скорость в любой момент времени t_0; б) скорость в момент времени $t=2$ с.

Решение. а) Мгновенная скорость точки в момент времени t_0 равна: $v(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0} v_{\text{ср}}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Пусть значение аргумента t_0 получает приращение Δt, найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta s=f(t_0+\Delta t)-f(t_0)=3(t_0+\Delta t)^2-4(t_0+\Delta t)+2-3t_0^2+$$
$$+4t_0-2=3t_0^2+6t_0\Delta t+3\Delta t^{\,2}-4t_0-4\Delta t-3t_0^2+4t_0=(6t_0+$$
$$+3\Delta t-4)\Delta t.$$

Найдем среднюю скорость за промежуток времени Δt:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{(6t_0+3\Delta t-4)\Delta t}{\Delta t}=6t_0+3\Delta t-4.$$

Найдем мгновенную скорость в момент времени t_0:

$$v_{\text{мгн}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(6t_0+3\Delta t-4)=6t_0-4.$$

Итак, при заданном законе движения $s(t)$ мгновенная скорость в любой момент времени t вычисляется по формуле $v(t)=6t-4$.

б) При $t=2$ с имеем: $v(2)=6\cdot 2-4=8$ (м/с).

Пример 2. Путь $s(t)$, пройденный свободно падающим телом за время t, выражается формулой $s(t)=\frac{gt^2}{2}$, где g — ускорение свободного падения. Найдите: а) скорость падающего тела в любой момент времени; б) мгновенную скорость при $t=3$ с.

Решение. а) В момент времени t путь $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$, в момент времени $t_1=t+\Delta t$ путь $s(t_1)=\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2=\frac{1}{2}g(t^2+$ $+2t\Delta t+(\Delta t)^2)$. За промежуток времени от t до t_1, равный Δt, тело пройдет путь $\Delta s=s(t_1)-s(t)=\frac{1}{2}g(t^2+2t\Delta t+(\Delta t)^2)-\frac{1}{2}gt^2=$

$$=gt\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2.$$

По определению мгновенной скорости имеем:

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt+\frac{1}{2}g\Delta t\right)=gt.$$

Итак, при свободном падении тело движется со скоростью $v(t)=gt$.

б) При $t=3$ с получим: $v(3)=g\cdot 3\approx 9{,}8\cdot 3=29{,}4$ (м/с).

Общей математической характеристикой рассмотренных процессов служит скорость изменения функции в зависимости от изменения ее аргумента. Рассмотренные примеры показывают, что задача вычисления средней скорости изменения функции $y=f(x)$ на промежутке $[x;\ x+\Delta x]$ сводится к вычислению отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$. А задача вычисления мгновенной скорости изменения функции в точке x — к нахождению предела

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Определение 1. **Средней скоростью изменения функции $f(x)$ на промежутке $[x_1;\ x_2]$ называется отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.**

Определение 2. **Мгновенной скоростью изменения функции $f(x)$ в точке x называется предел средней скорости изменения функции на промежутке $[x;\ x+\Delta x]$ при Δx, стремящемся к нулю.**

Пример 3. Найдите мгновенную скорость изменения функции $f(x)=x^2+3x$ в точке $x=5$.

Решение. Пусть некоторое значение аргумента x_0 получает приращение Δx. Найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2+3(x_0+\Delta x)-(x_0^2+3x_0)=$$
$$=x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2+3x_0+3\Delta x-x_0^2-3x_0=2x_0\Delta x+3\Delta x+\Delta x^2.$$

Найдем среднюю скорость изменения функции на промежутке Δx:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{2x_0\Delta x+3\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=$$
$$=2x_0+3+\Delta x.$$

Найдем мгновенную скорость изменения функции в точке x_0:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+3+\Delta x)=2x_0+3.$$

Вычислим значение мгновенной скорости изменения функции в точке $x_0=5$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=2\cdot 5+3=13.$$

Упражнения

1. Сформулируйте и запишите определения средней и мгновенной скорости изменения функции.

2. Расстояние от Москвы до Новосибирска 3200 км. Скорый поезд проходит его за 64 ч. Определите среднюю скорость движения поезда.

3. Что принимается за величину мгновенной скорости прямолинейно движущейся точки?

4. Точка движется прямолинейно, координата ее изменяется по закону $s(t)=5t^2+t+3$ (s — путь в метрах, t — время в секундах). Найдите мгновенную скорость движения через 5 с после начала движения.

5. Точка движется прямолинейно, координата ее изменяется по закону $s(t)=v_0t+\frac{at^2}{2}$, где v_0 — начальная скорость, a — ускорение. Найдите мгновенную скорость в момент времени $t_0=2$ с.

6. Величина угла φ поворота точки вокруг оси в зависимости от времени t задана функцией $\varphi(t)=3t^2-2t+7$ (рад). Выведите формулу для вычисления мгновенной угловой скорости и вычислите ее значение при $t=6$ с.

7. При нагревании тела его температура T изменяется в зависимости от времени нагревания t по закону $T(t)=0{,}6t^2+4t$. Выведите формулу для вычисления мгновенной скорости изменения температуры тела и найдите мгновенную скорость при $t=5$ с.

8. Найдите среднюю скорость изменения функции $f(x)$ на промежутке Δx, если: а) $f(x)=5-3x$; б) $f(x)=3x^2$.

9. Найдите мгновенную скорость изменения следующих функций в точке $x=3$:

а) $f(x)=2x+7$; б) $\varphi(x)=-x^2+2x$;
в) $\psi(x)=x^3$; г) $g(x)=-x^2+2x-4$.

§ 21. ПРОИЗВОДНАЯ

Мгновенную скорость изменения функции принято называть производной функции (или короче производной). Производную обозначают y' или $f'(x)$ (читают: «игрек штрих», «эф штрих от икс»). Итак,

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную на промежутке $]a;\ b[$, и x_0 — некоторую точку этого промежутка.

Определение. **Производной функции в данной точке называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.**

По определению $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

Операция нахождения производной от данной функции $f(x)$ называется дифференцированием этой функции. Если предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$ в точке x_0 существует, то говорят, что данная функция имеет производную или дифференцируема в этой точке.

Функция $y=f(x)$, $x\in\ ]a;\ b[$, имеющая в каждой точке промежутка $]a;\ b[$ производную, называется *дифференцируемой* на этом промежутке. Следует заметить, что для существования производной в точке x_0 необходимо, чтобы функция была определена в некоторой окрестности точки x_0, включая эту точку. Это видно из такой записи производной:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ \text{(если } x\to x_0\text{, то } \Delta x=x-x_0\to 0\text{)}.$$

Если функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке $]a;\ b[$, то каждой точке x_0 этого промежутка соответствует единственное число $f'(x_0)$. Это соответствие называют производной функции и обозначают $f'(x)$.

План отыскания производной функции $f(x)$ в точке x_0:

1. Фиксируют некоторую точку x и рассматривают приращение Δx.

2. Находят соответствующее приращение функции: $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

3. Находят отношение приращения функции к приращению аргумента: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

4. Вычисляют предел этого отношения при Δx, стремящемся к нулю: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

5. Вычисляют $f'(x_0)$ — значение производной функции $f'(x)$ в точке x_0.

Пример 1. Найдите производную линейной функции $f(x)=ax+c$ в точке $x=-2$.

Решение. Выполняем последовательно операции 1—5.

1. Рассмотрим x и Δx.

2. Находим приращение функции:

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=a(x+\Delta x)+c-(ax+c)=a\Delta x.$$

3. Находим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{a\Delta x}{\Delta x}=a.$$

4. Находим производную данной функции:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}a=a.$$

Таким образом, $(ax+c)'=a$, т. е. производная линейной функции есть постоянная величина, равная угловому коэффициенту прямой $y=ax+c$.

5. Значение $f'(x)$ в точке $x=-2$ равно $f'(-2)=a$.

Рассмотрим частные случаи формулы $(ax+c)'=a$:

а) для функции $f(x)=x$ имеем: $(x)'=1$;

б) для функции $f(x)=c$ имеем: $(c)'=0$; производная постоянной равна нулю.

Последний результат очевиден. Так как $f(x+\Delta x)=f(x)=c$, то $\Delta f=c-c=0$; $\frac{\Delta f}{\Delta x}=0$, $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=0$.

Пример 2. Найдите производную функции $\varphi(x)=x^2$. Вычислите $\varphi'(1)$, $\varphi'(-2{,}5)$.

Решение. 1. Рассмотрим x и Δx.

2. $\Delta\varphi=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$.

3. $\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$.

4. $\varphi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}2x+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=2x+$ $+0=2x$.

Итак, $(x^2)'=2x$.

5. $\varphi'(1)=2\cdot 1=2$; $\varphi'(-2{,}5)=2\cdot(-2{,}5)=-5$.

Пример 3. Найдите производную функции $f(x)=\frac{1}{x}$.

Решение. 1. x; Δx.

2. $\Delta f(x)=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}=\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$.

3. $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{-1}{x(x+\Delta x)}$.

4. $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x(x+\Delta x)}=\frac{-1}{x^2+x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x}=-\frac{1}{x^2}$.

Итак, $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

Пример 4. Найдите производную функции $f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$.

Решение 1. x; Δx.

2. $\Delta f(x)=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=$ $=\frac{x+\Delta x-x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$.

3. $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$.

4. $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Итак, $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Пример 5. Найдите производную функции $y=\frac{2x-1}{x+1}$. Вычислите $y'(2)$.

Решение. 1. Рассмотрим значения аргумента x и $x+\Delta x$, принадлежащие одному из промежутков области определения.

2. $\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=\frac{2(x+\Delta x)-1}{x+\Delta x+1}-\frac{2x-1}{x+1}=$ $=\frac{\Delta x(2x+2-2x+1)}{((x+1)+\Delta x)(x+1)}=\frac{3\Delta x}{((x+1)+\Delta x)(x+1)}$.

3. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3\Delta x}{((x+1)+\Delta x)(x+1)\Delta x}=\frac{3}{((x+1)+\Delta x)(x+1)}$.

4. $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{3}{((x+1)+\Delta x)(x+1)}=\frac{3}{(x+1)^2}$.

5. $y'(2)=\frac{3}{(2+1)^2}=\frac{1}{3}$.

Упражнения

1. Сформулируйте определение производной функции и запишите план нахождения производной.

2. Пользуясь определением производной, найдите производные следующих функций:

а) $f(x)=3x+1$ в точке $x=5$;
б) $\varphi(x)=4x^2-1$ в точке $x=2$;
в) $h(x)=5x^2+3x+8$ в точке $x=-4$;
г) $g(t)=\frac{2t+1}{t}$ в точке $t=9$;
д) $y=ax^2+bx+c$ в точке $x=3$;
е) $\psi(t)=\frac{2}{t+1}$ в точке $t=1$;
ж) $h(x)=\sqrt{3x+7}$ в точке $x=3$;
з) $\eta(x)=\frac{2x-3}{4-x}$ в точке $x=2$.

3. Заполните таблицу:

$f(x)$	c	x	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$	$ax+b$	ax^2+bx+c
$\Delta f(x)$								
$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$								
$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$								
$f'(2)$								

4. Какая функция называется дифференцируемой: а) в точке; б) на числовом промежутке?

5. Найдите производную функции $f(x)=4x^2+1$ и докажите, что $4f'(1)-f(2)=15$.

6. Найдите производную функции $f(x)=5x^2+6x$ и докажите, что $f(2)+2f'(-2)=4$.

7. Докажите, что производная от площади квадрата с переменной стороной равна его полупериметру.

8. Пользуясь определением производной, докажите, что производная площади круга при переменном радиусе равна длине окружности этого круга.

§ 22*. ПРОИЗВОДНАЯ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Существование производной функции в точке связано с непрерывностью рассматриваемой функции.

Теорема. ***Если функция $y=f(x)$ в точке x_0 имеет производную, то она непрерывна в этой точке.***

Доказательство. Пусть в точке x_0 функция $y=f(x)$ имеет производную $f'(x_0)$. Докажем, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Представим $f(x)$ в виде суммы: $f(x)=f(x)+f(x_0)-f(x_0)=$ $=f(x_0)+(f(x)-f(x_0))=f(x_0)+\Delta f(x_0)=f(x_0)+\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\cdot\Delta x$.

Найдем предел $f(x)$ при x, стремящемся к x_0, т. е. при Δx, стремящемся к нулю:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\left(f(x_0)+\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)=$$

$$=\lim_{x\to x_0} f(x_0)+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=f(x_0)+f'(x_0)\cdot 0=f(x_0).$$

По определению непрерывности функции в точке (см. § 15) функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Заметим, что для непрерывной функции $f(x)$, если $\Delta x\to 0$, то $\Delta f(x)\to 0$.

Обратная теорема неверна. Приведем пример функции, непрерывной в некоторой точке, но не имеющей производной в этой точке. Функция $y=|x-1|$, заданная на множестве всех действительных чисел, непрерывна в точке $x=1$ (рис. 49). Однако в этой точке данная функция производной не имеет. Так как $|x-1|=\begin{cases} x-1 \text{ при } x>1, \\ -(x-1) \text{ при } x<1,\end{cases}$ то, используя значение производной линейной функции (см. § 21), получим:

$$f'(x)=(|x-1|)'=\begin{cases}(x-1)'=1, \text{ если } x>1, \\ (1-x)'=-1, \text{ если } x<1.\end{cases}$$

Таким образом, мы нашли производную в любой точке области определения функции $f(x)=|x-1|$, кроме точки $x=1$. Попытаемся теперь найти производную при $x=1$:

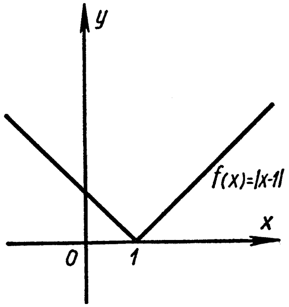


Рис. 49

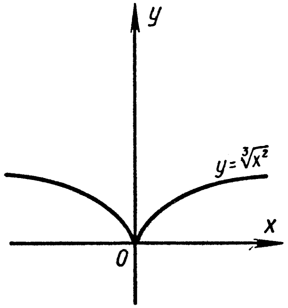


Рис. 50

$$\Delta f(x)=|(x+\Delta x)-1|-|x-1|;$$

$$\Delta f(1)=|\Delta x|;$$

$$\frac{\Delta f(1)}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, \text{ если } \Delta x>0, \\ -1, \text{ если } \Delta x<0.\end{cases}$$

Поэтому в точке $x=1$ не существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Следовательно, данная функция в этой точке не имеет производной.

Данный пример показывает, что существуют функции, непрерывные в некоторых точках, но не дифференцируемые в них.

Другим примером такой функции является функция $y=\sqrt[3]{x^2}$, определенная на множестве всех действительных чисел (рис. 50). В точке $x=0$ эта функция непрерывна, но не дифференцируема.

§ 23. ПРОИЗВОДНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СУММЫ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО ФУНКЦИЙ. ПРОИЗВОДНАЯ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ

В предыдущих параграфах мы научились находить производные некоторых функций. Докажем теперь несколько теорем, позволяющих находить производные выражений, составленных из таких функций.

Теорема 1. ***Производная суммы (разности) двух функций, каждая из которых имеет производную, равна сумме (разности) производных этих функций.***

Доказательство проведем для суммы функций.

Дано: $u(x)$, $v(x)$; $u'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$ и $v'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$.

Доказать: $(u(x)+v(x))'=u'(x)+v'(x)$.

Обозначим $u(x)+v(x)=f(x)$ и найдем производную функции.

1. Пусть x и $x+\Delta x$ — значения аргумента, принадлежащие $D(f)$.

2. $\Delta f(x) = (u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)) - (u(x) + v(x)) = (u(x+\Delta x) - u(x)) + (v(x+\Delta x) - v(x))$.

3. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} + \dfrac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$.

4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$.

Тогда $f'(x) = u'(x) + v'(x)$. Учитывая, что $f(x) = u(x) + v(x)$, имеем:

$$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x).$$

Задание 1. Докажите, что $(u(x) - v(x))' = u'(x) - v'(x)$.

Замечание. Можно доказать справедливость теоремы 1 для суммы любого конечного числа дифференцируемых функций, т. е.

$$(u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x))' = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x).$$

Пример 1. Найдите производную функции $f(x) = x^2 + x - 7$. Вычислите $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(3)$.

Решение. $f'(x) = (x^2 + x - 7)' = (x^2)' + (x)' - (7)' = 2x + 1 - 0 = 2x + 1$; $f'(-1) = 2\cdot(-1) + 1 = -1$; $f'(0) = 2\cdot 0 + 1 = 1$; $f'(3) = 2\cdot 3 + 1 = 7$.

Теорема 2. ***Производная произведения двух функций, каждая из которых имеет производную, равна сумме произведений каждой функции на производную другой функции.***

Дано: $u(x)$, $v(x)$; $u'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$; $v'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$.

Доказать: $(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + v'(x)\cdot u(x)$.

Доказательство. Обозначим $f(x) = u(x)\cdot v(x)$ и найдем производную $f(x)$.

1. Пусть x и $x+\Delta x$ — значения аргумента, принадлежащие $D(f(x))$.

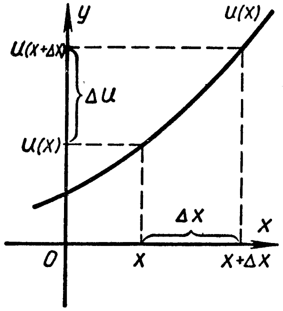


Рис. 51

2. $\Delta f = u(x+\Delta x)\,v(x+\Delta x) - u(x)v(x)$, но так как $u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u$ (рис. 51) и $v(x+\Delta x) = v(x) + \Delta v$, то $\Delta f = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\,\Delta v - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\,\Delta v$.

3) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v}{\Delta x} = u\dfrac{\Delta v}{\Delta x} + v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v$.

4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(u\dfrac{\Delta v}{\Delta x} + v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v\right) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right) + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\right) + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v\right)$.

Множители $u(x)$ и $v(x)$ не зависят от Δx. Функция $v(x)$ имеет производную, поэтому она непрерывна и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0$.

Имеем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v = u\cdot v' + v\cdot u' + u'\cdot 0 = u'v + v'u.$$

Итак, доказано, что

$$(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\,v(x) + v'(x)\cdot u(x).$$

Полученная формула называется формулой Лейбница[1].

Замечание. Можно доказать, что производная произведения любого конечного числа множителей равна сумме произведений производной каждого из них на все остальные, например:

$$(u\cdot v\cdot w)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак производной: $(c\cdot u(x))' = c\cdot u'(x)$.

Действительно, по теореме 2 имеем: $(c\cdot u(x))' = c'\,u(x) + c\cdot u'(x)$, но $c' = 0$, поэтому $(c\cdot u(x))' = c\cdot u'(x)$.

Следствие 2. Производная степенной функции $f(x) = x^n$, где $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 2$, равна произведению показателя n на степень x^{n-1}, т. е. $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Доказательство.

$$f'(x) = (x^n)' = (\underbrace{xxx\ldots x}_{n\text{-множителей}})' = x'(\underbrace{xx\ldots x}_{(n-1)\,\text{множителей}}) + x'(\underbrace{xx\ldots x}_{(n-1)\,\text{множителей}}) + \ldots + x'(\underbrace{xx\ldots x}_{(n-1)\,\text{множителей}}).$$

Так как $x' = 1$ и $\underbrace{xx\ldots x}_{(n-1)\,\text{множителей}} = x^{n-1}$, а число слагаемых равно числу множителей, т. е. n, то имеем:

$$f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}.$$

Пример 2. Найдите производную функции $f(x) = x^3(x-1)$.

Решение. $f'(x) = (x^3(x-1))' = (x^3)'(x-1) + (x-1)'x^3 = 3x^2(x-1) + (1-0)x^3 = 3x^3 - 3x^2 + x^3 = 4x^3 - 3x^2$.

Пример 3. Найдите производную многочлена

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

---

[1] Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) — выдающийся немецкий математик и философ. Наряду с И. Ньютоном является основателем математического анализа.

Решение. $f'(x) = (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n)' = (a_0x^n)' + (a_1x^{n-1})' + \ldots + (a_{n-1}x)' + (a_n)' = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}$.

Таким образом, многочлен есть дифференцируемая функция на множестве всех действительных чисел. Производная многочлена есть многочлен степени на единицу меньше исходного.

Теорема 3. ***Производную частного двух функций, каждая из которых имеет производную, находят по формуле***

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\,v(x) - v'(x)\,u(x)}{v^2(x)},$$

где $v(x) \neq 0$.

Дано:

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, $v(x) \neq 0$; $u'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$, $v'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$.

Доказать: $f'(x) = \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$.

Доказательство. 1. x и $x + \Delta x$ — значения аргумента, принадлежащие $D(f)$.

2. $\Delta f = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}$. Так как $u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u$, $v(x+\Delta x) = v(x) + \Delta v$ (рис. 51), то $\Delta f = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2 + v\Delta v}$.

3. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{\Delta x} \cdot \frac{1}{v^2 + v\Delta v} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v}$.

4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v}$.

Так как $u(x)$ и $v(x)$ не зависят от Δx, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$, то имеем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{v(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x) + v(x) \cdot 0} = \frac{v(x)u'(x) + u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Итак, доказано, что

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Пример 4. Найдите производную функции:

а) $\varphi(y) = \frac{3y-2}{1-4y}$;

б) $h(t) = \frac{t^3+5}{1+t^2}$.

Решение.

а) $\varphi'(y) = \left(\frac{3y-2}{1-4y}\right)' = \frac{(3y-2)'(1-4y) - (1-4y)'(3y-2)}{(1-4y)^2} = \frac{3(1-4y) + 4(3y-2)}{(1-4y)^2} = -\frac{5}{(1-4y)^2}$;

б) $h'(t) = \left(\frac{t^3+5}{1+t^2}\right)' = \frac{(t^3+5)'(1+t^2) - (1+t^2)'(t^3+5)}{(1+t^2)^2} = \frac{3t^2(1+t^2) - 2t(t^3+5)}{(1+t^2)^2} = \frac{t(t^3+3t-10)}{(1+t^2)^2}$.

Пример 5. Найдите производную функции $\varphi(x) = x^{-n}$, где $n \in \mathbf{N}$, $x \neq 0$.

Решение. $\varphi'(x) = (x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1}$.

Замечание. Производную степенной функции $h(x) = x^k$ с любым целым показателем k можно найти по формуле $(x^k)' = kx^{k-1}$. Причем если $k \geqslant 2$, то формулой можно пользоваться при любом $x \in \mathbf{R}$; если же $k \leqslant 1$, то формулой можно пользоваться при любых x, отличных от нуля.

В дальнейшем будет показано, что формулой $(x^k)' = kx^{k-1}$ можно пользоваться для нахождения производной степенной функции с любым действительным показателем r при $x > 0$: $(x^r)' = rx^{r-1}$. Например, если $r = \frac{1}{2}$ и $x > 0$, то $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, т. е. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Доказанные правила дифференцирования и найденные производные некоторых функций сведем в таблицу:

Функция	Производная
$y = c$	$(c)' = 0$
$y = x$	$(x)' = 1$
$y = x^n$, $n \neq 1$	$(x^n)' = nx^{n-1}$
$y = \sqrt{x}$, $x > 0$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
$y = cu$	$(cu)' = cu'$
$y = u \pm v$	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
$y = uv$	$(uv)' = u'v + v'u$
$y = \frac{u}{v}$, $v \neq 0$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Упражнения

1. Сформулируйте теорему о производной алгебраической суммы дифференцируемых функций.

2. Истинно ли высказывание: а) если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то в этой точке дифференцируема и функция $u(x)=f(x)+\varphi(x)$; б) если функция $f(x)$, равная сумме функций $u(x)$ и $v(x)$, дифференцируема в точке x_0, то в этой точке дифференцируемы и функции $u(x)$ и $v(x)$?

3. Известно, что функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0. Чему равна производная функции $f(x)$ в этой точке, если:

а) $f(x)=u(x)\cdot v(x)$; б) $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$, причем $v(x_0)\neq 0$?

4. Пользуясь таблицей, найдите производные функции $f(x)$, если:

а) $f(x)=x-2$; б) $f(x)=x^2+5$;
в) $f(x)=x^2+6x$; г) $f(x)=x^5-7x^2+8$;
д) $f(x)=x^2+\frac{1}{x}-4x$; е) $f(x)=\frac{7}{3}x(x+4)$;
ж) $f(x)=(3x-4)(2x+5)$; з) $f(x)=\frac{1}{3}(5x+3)(7x-2)$;
и) $f(x)=(x+2)(2x-3)(\frac{1}{3}x+5)$; к) $f(x)=x\sqrt[5]{x^2}$.

5. Найдите производную функции $f(t)$ и вычислите ее значение при t, равном -1 и 1, если:

а) $f(t)=\frac{15t-1}{t+3}$; б) $f(t)=\frac{1-t}{7+8t}$; в) $f(t)=\frac{t^2-1}{t^2+1}$;
г) $f(t)=\frac{at^2}{bt+c}$; д) $f(t)=t^2\sqrt[5]{t}$; е) $f(t)=\frac{2\sqrt{t}}{t-1}$.

§ 24. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим функции $y=f(z)$ и $z=\varphi(x)$. Функцию, заданную формулой $y=f(\varphi(x))$, называют сложной функцией. Например, $f(x)=2^{x^2+1}$ — сложная функция; она образована из функций $f(z)=2^z$ и $z=\varphi(x)=x^2+1$.

Пример 1. Составьте сложные функции $f(\varphi(x))$ и $\varphi(f(x))$, если $\varphi(x)=2x+1$, $f(x)=5x^2-2$.

Решение. $f(\varphi(x))=5(2x+1)^2-2=20x^2+20x+3$;
$\varphi(f(x))=2(5x^2-2)+1=10x^2-3$.

Из решения примера видно, что сложные функции $f(\varphi(x))$ и $\varphi(f(x))$ различны.

Область определения сложной функции $f(\varphi(x))$ состоит из таких значений аргумента x, которые содержатся в области определения функции $\varphi(x)$ и для которых значения функции φ принадлежат области определения функции f.

В образовании сложной функции $y=f(\varphi(x))$ участвует промежуточный аргумент $u=\varphi(x)$. Поэтому при нахождении производной сложной функции будем указывать, по какому именно аргументу взята производная, применяя при этом специальные обозначения:

$y'_x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ — производная функции y по аргументу x;
$y'_u=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}$ — производная функции y по аргументу u;
$u'_x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$ — производная функции u по аргументу x.

Теорема. ***Производная сложной функции $y=f(\varphi(x))$ находится по формуле***

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x,\ \text{где}\ u=\varphi(x).$$

Иначе эту же формулу можно записать так:

$$y'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x).$$

Этой формулой можно пользоваться при условиях, что функция $\varphi(x)$ дифференцируема в точке x, а функция $f(x)$ дифференцируема в точке $u=\varphi(x)$. При этих условиях сложная функция $y=f(\varphi(x))$ также дифференцируема, и ее производная может быть вычислена по приведенной выше формуле.

Докажем теорему только для одного случая, если $\Delta u=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)\neq 0$.

Дано: $y=f(\varphi(x))$, $\varphi(x)=u$; $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_x$.

Доказать: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

Доказательство. Пусть аргумент x получил приращение Δx, тогда промежуточный аргумент u получит приращение $\Delta u\neq 0$. Поскольку $u(x)$ получает приращение Δu, то функция $y(x)$ также получает приращение $\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u)$. Приращение Δx вызывает приращение Δu и Δy.

Представим $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$. Перейдем к пределу при $\Delta x\to 0$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

или

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

Пример 2. Найдите производную функции $y=(3x^2-1)^5$.

Решение. Обозначим $3x^2-1=u$, тогда $y=u^5$. Воспользуемся формулой $y'_x=y'_u\cdot u'_x$. Найдем:

$$y'_u=(u^5)'=5u^4,$$
$$u'_x=(3x^2-1)'=6x.$$

Тогда

$$y'_x=5(3x^2-1)^4\cdot 6x=30x(3x^2-1)^4.$$

И вообще $(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$.

При вычислении производной сложной функции явное введение вспомогательной буквы u для обозначения промежуточного аргумента не является обязательным. Поэтому производную данной функции находим сразу как произведение производной степенной функции u^5 на производную от функции $3x^2-1$:

$$y'=((3x^2-1)^5)'=5(3x^2-1)^4\cdot(3x^2-1)'=5(3x^2-1)^4\cdot 6x=$$
$$=30x(3x^2-1)^4.$$

Пример. Найдите производные следующих функций:

а) $y=(x^2+3x+1)^5$; б) $y=\left(\frac{x}{x+2}\right)^{-3}$; в) $y=\frac{1}{x^3-5}$.

Решение.

а) $y'_x=((x^2+3x+1)^5)'=5(x^2+3x+1)^4(x^2+3x+1)'=$
$=5(x^2+3x+1)^4(2x+3)$;

б) $y'_x=\left(\left(\frac{x}{x+2}\right)^{-3}\right)'=-3\left(\frac{x}{x+2}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{x}{x+2}\right)'=-3\frac{(x+2)^4}{x^4}\times$
$\times\frac{x'(x+2)-x(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{-3(x+2)^2}{x^4}\cdot\frac{x+2-x}{1}=-\frac{6(x+2)^2}{x^4}$;

в) $y'_x=\left(\frac{1}{x^3-5}\right)'=-\frac{1}{(x^3-5)^2}\cdot(x^3-5)'=-\frac{3x^2}{(x^3-5)^2}$.

Упражнения

1. Приведите примеры сложных функций.

2. Найдите область определения функций:

а) $f(x)=2\sqrt{9-x^2}$; б) $\varphi(t)=\lg(t^2-7t+12)$;

в) $h(y)=\frac{1}{\sqrt{5y-8}}$; г) $y(u)=\sqrt{(1-u)(3+7u)}$.

3. Даны функции: $f(x)=2x+3$, $\varphi(x)=\sqrt{x-5}$ и $h(x)=\lg x+2x$. Составьте функции: а) $f(\varphi(x))$; б) $f(h(x))$; в) $\varphi(h(x))$; г) $h(\varphi(x))$.

4. Найдите значения производных следующих функций в точках $x=0$ и $x=2$:

а) $y=(3x-2)^{50}$; б) $y=(5-7x)^{10}$; в) $y=(x^2+3)^4$;

г) $y=(7-8x^2)^{11}$; д) $y=\sqrt{5-2x}$; е) $y=\sqrt{x^2+6x+12}$;

ж) $y=\frac{1}{(2x+5)^3}$; з) $y=\frac{1}{x^2+8}$; и)* $y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+3}$;

к)* $y=(5-2x)^7\cdot\sqrt{3x+4}$.

§ 25. ПОВТОРЕНИЕ

1. Сформулируйте определение предела функции в точке. Приведите пример функции, имеющей предел в точке $x=2$. Приведите пример функции, не имеющей предела в точке $x=3$.

2. Постройте графики функций:

а) $f(x)=\begin{cases}4x+1, & x<-1,\\ -x^2, & x\geqslant -1;\end{cases}$ б) $\varphi(x)=\begin{cases}3-x, & x<1,\\ \lg x, & x\geqslant 1;\end{cases}$

в) $g(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^x, & x\leqslant -1,\\ 3, & x>-1.\end{cases}$

Найдите $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$; $\lim\limits_{x\to -2}f(x)$; $\lim\limits_{x\to 10}\varphi(x)$; $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$; $\lim\limits_{x\to -1}g(x)$; $\lim\limits_{x\to 7}g(x)$.

3. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке. Докажите, что функция $f(x)=x^3+2x-4$ непрерывна в точке $x=-5$.

4. Выясните существование предела в точках -2; -1; 0; 1; 2 для функции:

а) $y=\frac{x+|x|}{x}$; б) $y=\begin{cases}x^2+x+1, & x\geqslant 2,\\ \frac{1}{2}x, & x<2.\end{cases}$

5. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{2x^2-7x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{2x^2+10x+12}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{2}{1-x^2}\right)$; г)* $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x-3}-2}{x^2-49}$;

д)* $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-5}-1}{36-x^2}$; е)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{1-\sqrt[3]{1+x}}$;

ж)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-\sqrt[3]{8-x}}{1-\sqrt{1-x}}$.

6. Для функций: а) $f(x)=-2x+1$; б) $f(x)=3x-1$ найдите $f'(x)$, пользуясь определением производной.

7. а) Решите уравнение $h'(x)=0$, если $h(x)=2x^3-3x^2+1$.
   б) Решите уравнение $h'(x)=0$, если $h(x)=x^3+1{,}5x^2+3$.

8. а) Для функции $\varphi(x)=(2x-1)^{16}$ найдите $\varphi'(x)$ и $\varphi'(1)$.
   б) Для функции $\varphi(x)=(3x+2)^{15}$ найдите $\varphi'(x)$ и $\varphi'(-1)$.

9. Найдите производную функции:

а) $g(x)=\frac{5-4x}{2x-3}$; б) $u(x)=\frac{3}{x^2}+x\sqrt{x}$.

10. Дана функция $f(u)=u^5-4u^4+3u^3-2u^2+u-1$. Найдите $f'(u)$, $f'(-2)$, $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$.

11. Заполните таблицу:

$f(x)$	$2x+3$	$(5-3x)^2$	$5x-x^2+7$	$\frac{1}{2x+7}$	$\sqrt{4x-9}$
$\Delta f(x)$					
$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$					
$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$					
$f'(3)$					

12. Дана функция $s(t)=\frac{1}{2}t^4+\frac{3}{4}t^3-\frac{2}{7}t^2+0{,}2t-8$. Найдите $s'(t)$, $s'(0)$, $s'(3)$, $s'\left(\frac{1}{2}\right)$.

13. Докажите, что функция $\varphi(x)=|x-2|$ не имеет производной в точке $x=2$.

14. Решите уравнение $f'(x)-\frac{2}{x}f(x)=0$, если $f(x)=4x^3+2x$.

15. Решите неравенство:

а) $f'(x)<\varphi'(x)$ при $f(x)=2x^2-5x+1$ и $\varphi(x)=2x-x^3+7$;

б) $f'(x)+\varphi'(x)\leqslant 0$ при $f(x)=2x^3+12x^2$ и $\varphi(x)=9x^2+72x$.

16. Найдите производную функции:

а) $y=\sqrt{x^7}$; б) $f(x)=(2-x)(5x+3)$;

в) $y(u)=\left(u-\frac{1}{2}\right)\left(u-\frac{1}{3}\right)\left(u-\frac{1}{4}\right)$; г) $z(t)=\frac{1}{3t-5}$;

д) $s(t)=\frac{3t-2}{7-t}$; е) $\varphi(x)=\sqrt{5x+8+x^2}$;

ж) $f(x)=\frac{4x^2-3x+2}{x^2-7x+12.}$.

17. Выясните знак производной функции $f(x)$ в точке $x=1$, если:

а) $f(x)=\sqrt{x+9}\,(x-1)$; б) $f(x)=\frac{2x-1}{x^2+3}$.

18. Определите знак произведения $f'(x)\cdot\varphi'(x)$ в точке $x=3$, если $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$ и $\varphi(x)=\frac{1}{2x-5}+0{,}1x^2$.

19. Найдите производную функции:

а) $f(x)=(x+3)^{10}$; б) $\varphi(x)=(2x-1)^5$;

в) $y(x)=(x^2+x)^4$; г) $z(t)=(t^3+5t^2-8)^3$.

20. Дана функция $f(x)=\sqrt{x^3+x^2-5x+7}$. Найдите $f'(x)$.

21. Дана функция $\varphi(t)=\sqrt{(2t^3-1)^5}$. Найдите $\varphi'(1)$.

22. Дана функция $z(u)=\sqrt{\frac{u^2-5}{u^2+1}}$. Найдите $z'(6)$.

23. Найдите производную функции:

а) $y(x)=\left(\frac{1+x}{x^2-x}\right)^3$; б) $h(u)=\sqrt{\left(\frac{2u-3}{5+u}\right)^3}$;

в) $z(t)=\frac{1}{\sqrt{(2t-7)(4+t)}}$.

§ 26. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{x+3}}.$$

2. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 1{,}5}\frac{4x^2-9}{3-2x}=-6$.

3. Докажите непрерывность функции $y=5-2x^2$ в точке $x=2$.

4. Найдите: а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$; б)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

5. Для функции $y=3x^2$ найдите Δy, если $x=1$, $\Delta x=0{,}2$.

6. Постройте график функции $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{при } x\leqslant 1,\\ x-2 & \text{при } x>1\end{cases}$. Вычислите $f(-1)$, $f(1)$, $f(3)$.

7. Пользуясь определением производной, найдите производную функции $f(x)=2x+3$.

8. Найдите производные следующих функций:

а) $f(x)=-2x^2+3x-5$; б) $\varphi(x)=(3x^2-1)(4x+2)$;

в) $y(x)=x\cdot\sqrt[3]{x}$; г) $\psi(x)=\frac{3-2x}{x+4}$;

д) $h(x)=(3x^4-2x^2+1)^3$.

Глава IV.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

§ 27 *. ПОНЯТИЕ О ГЛАВНОЙ ЧАСТИ ПРИРАЩЕНИЯ ФУНКЦИИ

С понятием производной тесно связано понятие главной части приращения функции, которое играет важную роль в различных разделах математического анализа и его практических приложениях. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найдите приращение функции $f(x)=ax+b$.

Решение. Дадим аргументу x приращение Δx, тогда функция $f(x)$ примет значение $f(x+\Delta x)=a(x+\Delta x)+b$. Приращение функции равно: $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=a(x+\Delta x)+b-(ax+b)=a\cdot\Delta x$. Равенство $\Delta f(x)=a\cdot\Delta x$ показывает, что приращение линейной функции линейно зависит от приращения аргумента и не зависит от выбора точки x.

Пример 2. Найдите приращение функции $f(x)=x^2$.

Решение.

$$\Delta f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\cdot\Delta x+\Delta x^2.$$

Для квадратичной функции $f(x)=x^2$ ее приращение Δf состоит из суммы двух слагаемых: первое $2x\cdot\Delta x$ линейно относительно Δx; второе — $(\Delta x)^2$ содержит Δx во второй степени. Изучим изменение Δf с уменьшением значений Δx.

Сравним изменение величин обоих слагаемых Δf с уменьшением Δx, например, при $x=5$.

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$2x\cdot\Delta x$	10	1	0,1	0,01	0,001
$(\Delta x)^2$	1	0,01	0,0001	0,000001	0,00000001

Из таблицы видно, что с уменьшением Δx уменьшаются оба слагаемых: $2x\cdot\Delta x$ и $(\Delta x)^2$, причем первое уменьшается пропорционально Δx, а второе значительно быстрее. При малых значениях Δx значение приращения функции Δf зависит главным образом от величины первого слагаемого. Поэтому при вычислении приращения функции при достаточно малых значениях Δx слагаемым $(\Delta x)^2$ можно пренебречь. Таким образом, при малых значениях Δx приращение функции можно вычислить по приближенной формуле $\Delta f\approx 2x\cdot\Delta x$.

Пример 3. Найдите приращение функции $f(x)=x^3$.

Решение.

$$\Delta f=(x+\Delta x)^3-x^3=3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3.$$

Для кубической функции $f(x)=x^3$ приращение Δf состоит из суммы трех слагаемых: $3x^2\cdot\Delta x$ (линейное относительно Δx); $3x\cdot(\Delta x)^2$ (содержит Δx во второй степени); $(\Delta x)^3$ (содержит Δx в третьей степени).

При малых значениях Δx значение приращения Δf функции зависит главным образом от величины первого слагаемого.

Действительно, например, если $x=1$ и $\Delta x=0{,}01$, то

$$\Delta f=3\cdot 1^2\cdot 0{,}01+3\cdot 1\cdot(0{,}01)^2+(0{,}01)^3=0{,}03+0{,}0003+0{,}000001.$$

Если необходимо вычислить Δf с точностью до 0,01, то вторым и третьим слагаемыми можно пренебречь. В данном примере при вычислении приращения функции при достаточно малых Δx можно воспользоваться приближенной формулой $\Delta f\approx 3x^2\cdot\Delta x$.

В рассмотренных примерах приближенное значение приращения функции линейно зависит от Δx:

для функции $f(x)=ax+b$, $\Delta f=a\cdot\Delta x$;
для функции $f(x)=x^2$, $\Delta f\approx 2x\cdot\Delta x$;
для функции $f(x)=x^3$, $\Delta f\approx 3x^2\cdot\Delta x$.

Найдем погрешность δ, получаемую при применении этих приближенных формул.

Если $f(x)$ — линейная функция, то $\delta=0$. Это специфическое свойство линейной функции.

Если $f(x)$ — квадратичная функция, то $\delta=2x\cdot\Delta x+\Delta x^2-2x\cdot\Delta x=(\Delta x)^2$. При этом характерно, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\delta}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$.

Если $f(x)$ — кубическая функция, то $\delta=3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-3x^2\cdot\Delta x=3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$ и также $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\delta}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2)=0$.

Таким образом, приращение каждой из функций $ax+b$, x^2, x^3 можно представить в виде суммы двух слагаемых: линейного относительно Δx и такого слагаемого δ, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\delta}{\Delta x}=0$:

если $f(x)=ax+b$, то $\Delta f=a\cdot\Delta x+\delta$, $\delta=0$;
если $f(x)=x^2$, то $\Delta f=2x\cdot\Delta x+\delta$;
если $f(x)=x^3$, то $\Delta f=3x^2\cdot\Delta x+\delta$.

Множители a, $2x$, $3x^2$ в выражениях Δf при фиксированных значениях x постоянны, поэтому приращение каждой из рассмотренных функций представимо в виде

$$\Delta f=A\cdot\Delta x+\delta, \qquad (1)$$

где A — константа, а $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\delta}{\Delta x}=0$. В таком же виде можно представить приращение многих других функций, например $y=x^2+2x-1$, $y=x^3+4x-5$, $y=x^4$. Однако существуют функции, приращения которых в таком виде не представимы, например приращение функции $y=|x|$ в точке $x=0$.

Каким же условиям должна удовлетворять функция, чтобы ее приращение можно было бы представить в виде (1)? Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

Теорема. ***Для того чтобы приращение функции $y=f(x)$ в точке x можно было представить в виде $\Delta y=A\cdot\Delta x+\delta$, необходимо и достаточно, чтобы в точке x существовала производная: $f'(x)=A$.***

Доказательство этой теоремы рассматривать не будем.

Возвращаясь к примерам 1—3, видим:

если $f(x)=ax+b$, то $\Delta f=a\cdot\Delta x=(ax+b)'\cdot\Delta x+\delta$, где $\delta=0$;

если $f(x)=x^2$, то $\Delta f=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2=(x^2)'\cdot\Delta x+\delta$;

если $f(x)=x^3$, то $\Delta f=3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3=(x^3)'\Delta x+\delta$.

Из сформулированной теоремы следует, что приращение Δy функции $y=f(x)$, имеющей в точке x производную, можно представить в виде $\Delta y=f'(x)\Delta x+\delta$, где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\delta}{\Delta x}=0$.

Определение. **Выражение $f'(x)\cdot\Delta x$, линейно зависящее от Δx, называется главной частью приращения функции $y=f(x)$ и обозначается символом dy.**

Пример 4. Найдите главную часть приращения функции $f(x)$, если:

а) $f(x)=4x^3-3x^2+1$; б) $f(x)=\sqrt{x}-\frac{2}{x}$.

Решение.

а) $dy=f'(x)\cdot\Delta x=(4x^3-3x^2+1)'\Delta x=(12x^2-6x)\Delta x=6x(2x-1)\Delta x$;

б) $dy=\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)'\Delta x=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{2}{x^2}\right)\Delta x$.

Покажем на примерах применение производной к приближенным вычислениям.

Приращение функции в любой точке x_0 области ее определения выражается формулой $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\delta$. Известно также, что $\delta\to 0$ при $\Delta x\to 0$, поэтому $\Delta y\approx f'(x_0)\Delta x$ или $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$, откуда

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x. \qquad (2)$$

Полученная формула позволяет приближенно вычислять значения функции $f(x)$ для значений x, достаточно близких к числу x_0, если известны значения функций $f(x_0)$ и $f'(x_0)$. При этом точность вычисления значения функции повышается с уменьшением Δx. Рассмотрим на примерах вычисление приближенных значений функций по формуле (2).

Пример 5. Найдите $f(1{,}001)$, если $f(x)=x^3-2x^2+5x-1$.

Решение. Найдем приближенное значение функции, применяя формулу (2). Для этого значение аргумента, равное 1,001, целесообразно представить в виде суммы двух чисел $(x_0+\Delta x)$ так, чтобы нетрудно было вычислить $f(x_0)$ и $f'(x_0)\cdot\Delta x$.

Представим $1{,}001=1+0{,}001$, тогда $x_0=1$, а $\Delta x=0{,}001$.

$f(x_0)=f(1)=1^3-2\cdot 1^2+5\cdot 1-1=3$,

$f'(x)=3x^2-4x+5$, а $f'(x_0)=f'(1)=3\cdot 1^2-4\cdot 1+5=4$.

По формуле (2) имеем:

$$f(1{,}001)=f(1+0{,}001)\approx f(1)+f'(1)\cdot 0{,}001=3+4\cdot 0{,}001=3{,}004.$$

Пример 6. Пользуясь формулой (2), найдите приближенное значение $(1,\,95)^6$.

Решение. Число $(1{,}95)^6$ можно рассматривать как значение $y=x^6$ при $x=1{,}95$. Значение аргумента 1,95 представим в виде суммы $1{,}95=2+(-0{,}05)$, тогда $x_0=2$, а $\Delta x=-0{,}05$.

$$f(x_0)=f(2)=2^6=64,\ f'(x)=6x^5,\ f'(x_0)=f'(2)=6\cdot 2^5=192.$$

По формуле (2) имеем:

$$(1{,}95)^6=(2-0{,}05)^6\approx 2^6+6\cdot 2^5\cdot(-0{,}05)=64-192\cdot 0{,}05=54{,}4.$$

Опираясь на решения рассмотренных примеров, сформулируем план отыскания приближенного значения функции $f(x)$ при заданном значении аргумента x.

1. Данное значение аргумента x представляем в виде суммы двух чисел x_0 и Δx: $x=x_0+\Delta x$.
2. Вычисляем $f(x_0)$.
3. Находим $f'(x)$ и вычисляем $f'(x_0)$.
4. Находим приближенное значение $f(x)$ по формуле

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

Пример 7. Выведите формулу для вычисления приближенного значения $\sqrt[n]{x}$, где $x>0$.

Решение. Воспользуемся приведенным выше планом нахождения приближенного значения функции.

1. Пусть $x=x_0+\Delta x$.
2. Вычисляем $f(x_0)$: $f(x_0)=\sqrt[n]{x_0}$.
3. $f'(x)=(\sqrt[n]{x})'=(x^{\frac{1}{n}})'=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$, $f'(x_0)=\frac{\sqrt[n]{x_0}}{n\cdot x_0}$.
4. $\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{x_0+\Delta x}\approx\sqrt[n]{x_0}+\frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0}\cdot\Delta x. \qquad (3)$

Таким образом, мы получили формулу для вычисления приближенного значения корня n-й степени из положительного числа.

Пример 8. Пользуясь формулой (3), вычислите приближенное значение $\sqrt[5]{241}$.

Решение. Представим $\sqrt[5]{241}$ в виде $\sqrt[5]{243-2}$, $x_0=243$, $\Delta x=-2$.

По формуле (3) имеем: $\sqrt[5]{243-2}\approx\sqrt[5]{243}-\frac{\sqrt[5]{243}}{5\cdot 243}\cdot 2=$ $=3-\frac{3}{5\cdot 243}\cdot 2=3-\frac{2}{405}\approx 3-0{,}00493\approx 2{,}9951$.

Итак, $\sqrt[5]{241}\approx 2{,}9951$.

Упражнения

1. Какому условию должна удовлетворять функция, чтобы ее приращение Δy имело вид $\Delta y=A\Delta x+\delta$, где A — константа, а $\delta\to 0$ при $\Delta x\to 0$?

2. Сформулируйте определение главной части приращения функции $y=f(x)$.

3. Найдите главную часть приращения функции $\varphi(x)$, если: а) $\varphi(x)=2x+17$; б) $\varphi(x)=-3x^2+7x-10$; в) $\varphi(x)=\sqrt{3x}+\frac{1}{x^2}$.

4. Запишите формулу для вычисления приближенного значения функции в заданной точке.

5. По формуле $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$ найдите приближенное значение функции: а) $f(x)=5x^3-2x+3$ при $x=2{,}01$ и $x=1{,}98$.

6. На миллиметровой бумаге постройте графики функций $y=x^2$, $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$ при $x\geqslant 0$. Найдите приближенные значения $(2{,}4)^2$; $(1{,}9)^3$; $\sqrt{4{,}2}$; $\sqrt[3]{7{,}8}$: а) по графикам; б) по таблицам В. М. Брадиса; в) по формуле (2).

7. Найдите приближенные значения: а) $\sqrt{1{,}004}$; б) $\sqrt[3]{27{,}02}$; в) $\sqrt[3]{131}$; г) $\sqrt[4]{62}$; д) $\sqrt[7]{100}$.

§ 28. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Понятие производной тесно связано с понятием касательной к кривой. Уточним смысл понятия касательной.

В курсе геометрии вы познакомились с определением касательной только к окружности. Касательная к окружности определяется как прямая, лежащая в одной плоскости с окружностью и имеющая с ней только одну общую точку. Такое определение касательной к окружности не может быть перенесено на все кривые. Например, ось Oy имеет только одну общую точку с графиком функции $y=x^3$ и тем не менее считать ее касательной к кубической параболе в точке 0 (рис. 52) нельзя. Прямая $y=1$ и синусоида $y=\sin x$ имеют бесконечное множество общих точек (рис. 53). Однако прямую $y=1$ естественно считать касательной к графику функции $y=\sin x$. Для введения определения касательной к кривой рассмотрим функцию $y=f(x)$ и ее график — кривую линию (рис. 54). Зафиксируем на этой кривой произвольную точку M_0 и проведем через нее секущую M_0M.

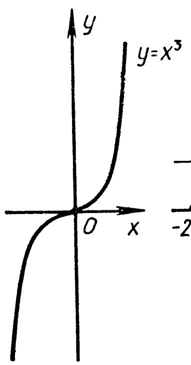


Рис. 52

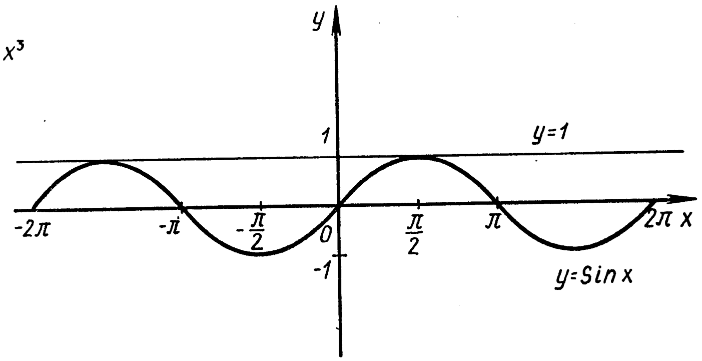


Рис. 53

Пусть точка M, двигаясь по кривой, приближается к точке M_0. При этом секущая M_0M будет поворачиваться вокруг точки M_0 и в предельном положении при $M\to M_0$ займет положение прямой M_0T. Прямую M_0T называют касательной к данной кривой в точке M_0.

Определение. **Касательной M_0T к графику функции $y=f(x)$ в точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M, когда точка M, двигаясь по кривой, стремится к точке M_0.**

Очевидно, введенное определение касательной к кривой является обобщением известного из геометрии определения каса-

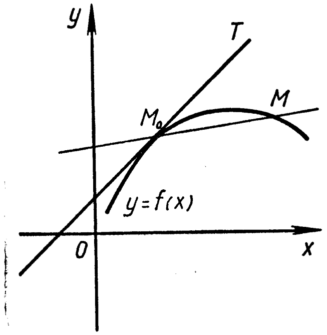


Рис. 54

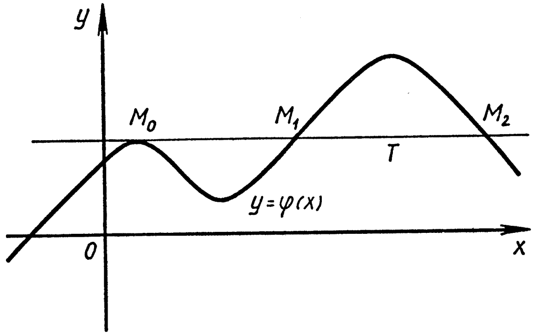


Рис. 55

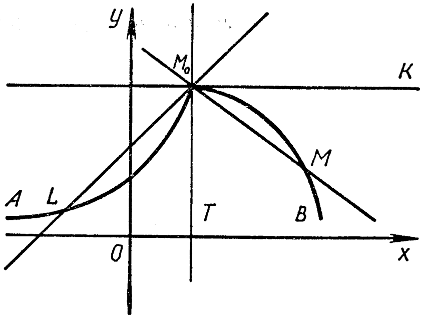


Рис. 56

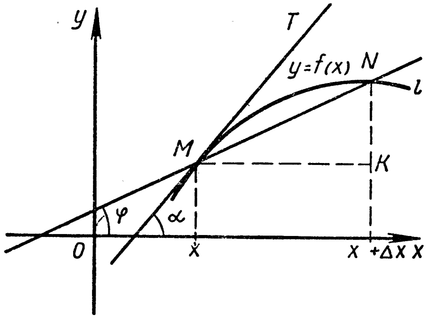


Рис. 57

тельной к окружности. Касательная к любой кривой (графику функции) в отличие от касательной к окружности может иметь с этим графиком более одной общей точки.

Например, на рисунке 55 касательная M_0T в точке M_0 к кривой $y=\varphi(x)$ имеет еще две другие общие точки M_1 и M_2 с этой кривой. Касательная $y=1$ в точке $x=\frac{\pi}{2}$ к графику функции $y=\sin x$ имеет бесконечное множество общих точек с этой кривой (рис. 53), и все они будут точками касания. Следует иметь в виду, что не в любой точке кривой можно провести к ней касательную. Кривая AM_0B, изображенная на рисунке 56, в точке M_0 не имеет касательной. Эта кривая состоит из двух частей AM_0 и M_0B. Возьмем на первой из них точку L и проведем секущую M_0L, а на второй — точку M и проведем секущую M_0M.

При стремлении точки L к точке M_0 по первой части кривой секущая LM_0 займет предельное положение M_0T. При приближении точки M к M_0 по второй части кривой секущая M_0M занимает предельное положение M_0K. Получаем две различные прямые: M_0T и M_0K. Это означает, что в точке M_0 к данной кривой касательной не существует.

Возникает вопрос: при каком условии кривая $y=f(x)$ в заданной на ней точке имеет касательную? Ответ на этот вопрос можно получить, выяснив геометрический смысл производной. Геометрическое истолкование производной функции в данной точке связано с понятием касательной к графику этой функции. Рассмотрим непрерывную функцию $y=f(x)$ и ее график — кривую l (рис. 57).

Пусть в точке $M(x;\ f(x))$ кривой существует касательная MT к данной кривой. Дадим аргументу x приращение Δx и отметим на кривой l точку $N(x+\Delta x;\ f(x+\Delta x))$. Проведем секущую MN и обозначим через φ величину угла, образованного секущей с положительным направлением оси Ox.

Из треугольника MNK (рис. 57) следует, что отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{tg}\varphi$. Если Δx стремится к нулю, то точка N будет перемещаться вдоль кривой, приближаясь к точке M. При этом секущая MN поворачивается вокруг точки M и величина угла φ меняется с изменением Δx. Предельным положением секущей при $\Delta x \to 0$ будет касательная MT, которая образует с положительным направлением оси Ox некоторый угол, его величину обозначим через α. Так как $\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi$, то $\operatorname{tg}\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\varphi=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)^1.$$

Таким образом, если график функции $y=f(x)$ в точке кривой $(x;\ f(x))$ имеет касательную, не перпендикулярную оси абсцисс, то функция $y=f(x)$ имеет в этой точке производную, которая равна угловому коэффициенту касательной.

Верно и обратное утверждение: если функция $y=f(x)$ в некоторой точке x имеет производную, то в точке $(x;\ f(x))$ существует касательная к ее графику. Значение производной в точке x равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в точке касания.

Таким образом, **геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции $y=f(x)$ в точке x равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с абсциссой x:**

$$\boldsymbol{f'(x)=k}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Пример 1. Найдите угол, образованный касательной к кривой $f(x)=2x^2+3x+1$ в точке $x=-1$ с положительным направлением оси абсцисс.

Решение. Обозначим величину искомого угла через α, тогда $\operatorname{tg}\alpha=f'(-1)$.

$$f'(x)=(2x^2+3x+1)'=4x+3,\quad f'(-1)=4\cdot(-1)+3=-1,$$
$$\operatorname{tg}\alpha=-1,\ \alpha=135^\circ\ \text{(рис. 58)}.$$

Пример 2. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $\varphi(x)=x(x-1)^3$ в точке $x=2$.

Решение. Угловой коэффициент касательной к кривой $\varphi(x)=x(x-1)^3$ в точке с абсциссой $x=2$ равен значению производной $(x\cdot(x-1)^3)'$ в этой точке, т. е. $k=\varphi'(2)$, но $\varphi'(x)=(x-1)^3+3(x-1)^2\cdot x=(x-1)^2(4x-1)$, $\varphi'(2)=(2-1)^2\cdot(4\cdot 2-1)=7$, поэтому $k=7$.

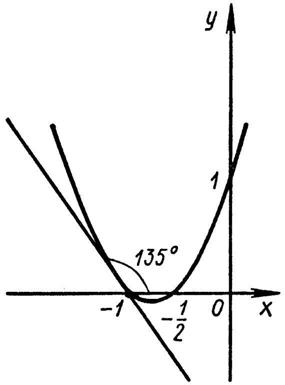


Рис. 58

---

[1] О непрерывности функции $y=\operatorname{tg}x$ будет сказано ниже.

Пример 3. В каких точках графика функции $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+5x+\frac{1}{3}$ касательная к нему параллельна прямой $y=8x+5$?

Решение. По условию касательные к графику и заданная прямая параллельны, поэтому угловые коэффициенты этих прямых равны между собой.

Угловой коэффициент k_1 прямой $y=8x+5$ известен, он равен 8. Угловой коэффициент касательной к кривой в некоторой точке x равен значению производной:

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{3}-x^2+5x+\frac{1}{3}\right)'=x^2-2x+5.$$

Для нахождения угловых коэффициентов искомых прямых составим уравнение $x^2-2x+5=8$. Решив его, найдем абсциссы двух точек касания: $x=-1$ и $x=3$.

Из уравнения кривой определяем ординаты точек касания:

$$y=\frac{(-1)^3}{3}-(-1)^2+5\cdot(-1)+\frac{1}{3}=-6 \text{ и } y=\frac{3^3}{3}-3^2+5\cdot 3+$$
$$+\frac{1}{3}=15\frac{1}{3}.$$

Таким образом, получим точки касания: $(-1;\ -6)$ и $\left(3;\ 15\frac{1}{3}\right)$.

Заметим, что понятие производной возникло в результате многовековых усилий, направленных на решение двух задач: проведение касательной к заданной кривой и нахождение скорости переменного движения. И в том и в другом случае задача сводится к нахождению предела отношения приращения функции к приращению аргумента.

Задание 1. Найдите угол между касательной к графику функции $y=x^2$ в точке $x=0{,}5$ и положительным направлением оси абсцисс.

Задание 2. Дана функция $y=2x^2+3$. Найдите угловой коэффициент касательной к графику этой функции в точке $x=-2$.

Упражнения

1. Сформулируйте определение касательной к кривой в заданной на ней точке.

2. Может ли касательная к кривой иметь с ней несколько общих точек?

3. Проведите касательную в каждой точке, отмеченной на графике функции $y=f(x)$ (рис. 59).

4. Имеет ли график функции $y=|x|$ касательную в точке с абсциссой: а) -1; б) 0; в) 1?

5. Постройте схематический график какой-либо функции, непрерывной на промежутке $[-5;\ 5]$ и не имеющей касательной в точке $(0;\ 0)$.

6. Постройте схематический график функции, непрерывной на промежутке $[-3;\ 3]$ и не имеющей касательной в точке $(-1;\ 0)$.

7. В чем состоит геометрический смысл производной?

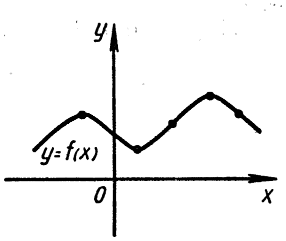


Рис. 59

8. Найдите угловой коэффициент касательной к параболе $y=x^2-4x$ в точке с абсциссой $x=-1$.

9. В каких точках угловые коэффициенты касательных к кривой $y=x^3$ равны 3?

10. Найдите угол между касательной к кривой $f(x)=4-\frac{1}{5}x^2$ и положительным направлением оси абсцисс в точке: а) $x_0=0$; б) $x_0=-2{,}5$.

11. В какой точке касательная к кривой $y=\sqrt{x}$ образует с положительным направлением оси абсцисс угол 45°?

12. Найдите угол между касательной к параболе $y=-x^2+2x-3$ и положительным направлением оси абсцисс в точке: а) $x_0=0{,}5$; б) $x_0=1$; в) $x_0=-1$.

§ 29. УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ К КРИВОЙ

Рассмотрим функцию $y=f(x)$. Ее график изображен на рисунке 60. В точке $M(x_0;\ y_0)$ проведена касательная к кривой $y=f(x)$. Составим уравнение касательной AB, зная координаты точки $M(x_0;\ y_0)$ касания и уравнение $y=f(x)$ кривой.

Касательная — это прямая. Уравнение любой прямой имеет вид $y=kx+b$, где k и b — параметры. Для составления уравнения касательной необходимо выразить параметры k и b через координаты точки касания, зная уравнение кривой.

Известно, что $k=f'(x_0)$. Поэтому уравнение касательной примет вид: $y=f'(x_0)x+b$ (1). Найдем b. Для этого воспользуемся тем, что касательная проходит через точку $M(x_0;\ y_0)$ и поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению касательной: $y_0=f'(x_0)x_0+b$, откуда $b=y_0-f'(x_0)x_0$.

Подставим теперь найденное значение b в уравнение (1) касательной, получим: $y=f'(x_0)x+y_0-f'(x_0)x_0$ или $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$. Итак, **уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M(x_0;\ y_0)$ имеет вид:**

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0) \qquad (2)$$

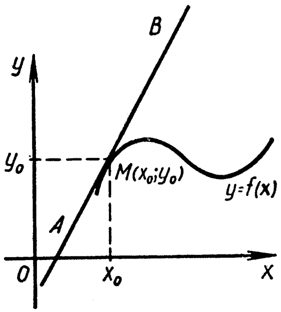


Рис. 60

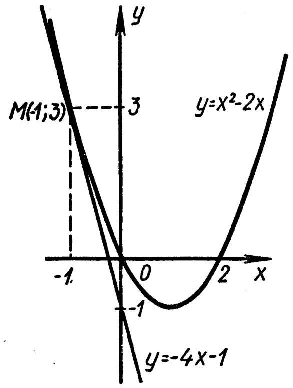


Рис. 61

Если функция $y=f(x)$ в точке x_0 не дифференцируема, то у данной кривой в точке с абсциссой x_0 нет касательной.

Практически уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в заданной точке x_0 можно отыскать по следующему плану.

1. Записываем уравнение (2) касательной: $y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

2. Находим $y_0=f(x_0)$.

3. Находим производную $y'=f'(x)$.

4. Вычисляем значение $f'(x)$ в точке x_0: $f'(x_0)$.

5. Подставляем значения x_0, y_0 и $f'(x_0)$ в уравнение (2).

Пример 1. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=x^2-2x$ в точке $x_0=-1$. Выполните схематический рисунок.

Решение. 1. $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ — уравнение искомой касательной.

2. $y_0=(-1)^2-2\cdot(-1)=3$.

3. $f'(x)=(x^2-2x)'=2x-2$.

4. $f'(-1)=2\cdot(-1)-2=-4$.

5. Подставляем значения x_0, y_0 и $f'(x_0)$ в уравнение касательной: $y-3=-4(x-(-1))$ или $y-3=-4x-4$, $y=-4x-1$ (рис. 61).

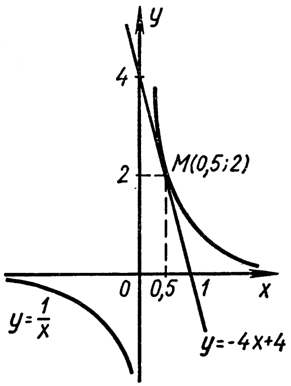


Рис. 62

Пример 2. Составьте уравнение касательной к гиперболе $y=\frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x_0=0{,}5$. Выполните схематический рисунок.

Решение. 1. $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

2. $y_0=\frac{1}{0{,}5}=2$.

3. $f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

4. $f'(0{,}5)=-\frac{1}{0{,}5^2}=-4$.

5. $y-2=-4(x-0{,}5)$; $y=-4x+4$ (рис. 62).

Упражнения

1. Найдите уравнение касательной к параболе $y=3x^2-2$ в точке: а) $x_0=-2$; б) $x_0=0$; в) $x_0=1$.

2. Найдите уравнение касательной к кривой $y=2x^3-3x^2+4x-6$ в точке:

а) $x_0=0$; б) $x_0=1$; в) $x_0=3$.

3. Найдите координаты точки, принадлежащей параболе $y=x^2-2x+6$, если известно, что касательная, проведенная к параболе в этой точке, образует с положительным направлением оси абсцисс угол 45°.

4. В каких точках кривой $y=x^3-3x^2-9x+6$ касательная параллельна оси Ox?

5. Покажите, что на графике функции $y=x^3+x^2+x-5$ нет точек, касательная в которых параллельна оси абсцисс.

6. Найдите точки, принадлежащие кривым $y=x^3-x-1$ и $y=3x^2-4x+1$, в которых касательные, проведенные к этим кривым, параллельны.

7. Найдите уравнение касательной, проведенной к кубической параболе $y=x^3$, параллельно прямой $y=12x-5$.

§ 30. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ В ФИЗИКЕ

Производная есть мгновенная скорость изменения функции, поэтому производная широко применяется в физике.

Пример 1. Если материальная точка движется прямолинейно и ее координата изменяется по закону $x(t)$, то скорость ее движения $v(t)$ в момент времени t равна производной $x'(t)$: $v(t)=x'(t)$.

Пример 2. Если $Q(t)$ — закон изменения количества вещества, вступившего в химическую реакцию, то скорость $v(t)$ химической реакции в момент времени t равна производной: $v(t)=Q'(t)$.

Пример 3. Если $v(p)$ — закон изменения объема жидкости от внешнего давления p, то производная $v'(p)$ есть мгновенная скорость изменения объема при внешнем давлении, равном p.

Производная широко применяется при решении различных физических задач. Рассмотрим несколько таких задач.

Задача 1. Тело движется прямолинейно по закону $x(t)=3t^2+2t+1$, где $x(t)$ измеряется в метрах, время t — в секундах. Найдите скорость движения тела в момент времени $t=4$ с.

Решение. $x'(t)=6t+2$, $v(4)=x'(4)=6\cdot4+2=26$ (м/с).

Задача 2. Для машины, движущейся со скоростью 30 м/с, тормозной путь определяется по формуле $s(t)=30t-16t^2$, где $s(t)$ — путь в метрах, t — время торможения в секундах. В течение какого времени осуществляется торможение до полной остановки машины? Сколько метров будет двигаться машина с начала торможения до полной ее остановки?

Решение. Мгновенная скорость $v(t)$ машины при торможении равна производной:

$$v(t)=s'(t)=(30t-16t^2)'=30-32t.$$

В конце тормозного пути $v(t)=0$, поэтому имеем: $30-32t=0$, откуда $t=\frac{15}{16}$ с. Значит, торможение осуществлялось в течение

$\frac{15}{16}$ с. Тормозной путь машины составит: $s\left(\frac{15}{16}\right)=30\cdot\frac{15}{16}-16\left(\frac{15}{16}\right)^2\approx 14$ м.

Задача 3. Тело движется прямолинейно по закону $x(t)=3+2t+t^3$, где $x(t)$ измеряется в метрах, время t — в секундах. Найдите ускорение движения тела в момент времени $t=3$ с.

Решение. Функция $x(t)$ есть закон прямолинейного движения. Мгновенная скорость $v(t)$ этого движения равна производной $x'(t)$. Мгновенная скорость $v(t)$ есть функция от времени. Ускорение движения есть скорость изменения скорости, поэтому ускорение движения в момент времени t равно производной $v'(t)$. Таким образом, ускорение движения в момент времени t равно: $v'(t)=(x'(t))'$, т. е. равно производной от производной. Эту производную называют второй производной от функции $x(t)$ и обозначают $x''(t)$. Поэтому ускорение движения $a(t)$ равно второй производной $x''(t)$.

Итак, $a(t)=x''(t)$; $x'(t)=(3+2t+t^3)'=2+3t^2$; $a(t)=x''(t)=(2+3t^2)'=6t$; $a(3)=6\cdot 3=18$ (м/с^2).

Задача 4. Тело, масса которого m (в кг), движется прямолинейно по закону $x(t)=3t^2+t$ (в м). Докажите, что движение тела происходит под действием постоянной силы.

Решение. Ускорение $a(t)=x''(t)$, $x'(t)=(3t^2+t)'=6t+1$; $a(t)=x''(t)=(6t+1)'=6$.

При данном законе движения тело движется с постоянным ускорением $a(t)=6$ (м/с^2). Масса тела m постоянна, значит, по второму закону Ньютона действующая на него сила $F=ma=6m$ (Н) также постоянна.

Упражнения

1. В чем состоит механический смысл производной?

2. Как найти скорость и ускорение, зная закон прямолинейного движения материальной точки?

3. Найдите скорость изменения функции $y=0{,}2x^3-\frac{1}{3}x^2+1$ в точке x.

4. Точка движется прямолинейно по закону $x(t)=2t^2-6t+5$, где $x(t)$ измеряется в метрах, время t — в секундах. Найдите: а) скорость в момент времени t; б) скорость в момент времени $t=2$ с; в) ускорение в любой момент времени.

5. Найдите ускорение движения в момент времени $t=4$ с по заданному закону движения: а) $x(t)=t^3-3t^2$; б) $x(t)=\sqrt{2t}$, где $x(t)$ измеряется в метрах, время t — в секундах.

6. Найдите скорость изменения объема $V(x)$ куба в зависимости от изменения длины x его ребра.

7. Найдите скорость изменения поверхности $s(x)$ куба в зависимости от изменения длины x его ребра.

8. Закон движения частицы $x(t)=t^3-t$, где $x(t)$ измеряется в метрах, время t — в секундах. Каково ускорение частицы в момент времени, когда скорость ее равна 11 м/с?

9*. Зенитный снаряд выброшен вертикально вверх с начальной скоростью v_0. На какой высоте h он будет в момент t (в с)? Определите скорость и ускорение движения снаряда. Через сколько секунд снаряд достигнет наивысшей точки и на каком расстоянии от поверхности земли он будет находиться?

10*. Камень опущен с высоты 81 м. Через сколько секунд он ударится о землю? Какова будет его скорость в момент удара?

11*. Тело массой 2 кг движется прямолинейно по закону $x(t)=t^3-3t^2+2$, где $x(t)$ измеряется в метрах, время t — в секундах. Найдите силу, действующую на тело в момент времени $t=3$ с.

12*. Тело массой 500 кг помещается в гидравлический лифт, толкающий его вверх. С какой силой лифт должен действовать на тело, чтобы оно двигалось с постоянным ускорением 0,5 м/с^2?

13*. Найдите вторую производную от функции $f(x)$, если:

а) $f(x)=x^5+2x^3-7$; б) $f(x)=\sqrt{x-8}$;

в) $f(x)=\frac{1}{x}$; г) $f(x)=ax^2+bx+c$.

§ 31. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ

При помощи производной можно устанавливать возрастание или убывание функции на различных промежутках области ее определения.

На рисунке 63 изображен график функции $y=f(x)$, возрастающей на промежутке $[a; b]$, а на рисунке 64 — график функции $y=\varphi(x)$, убывающей на промежутке $[c; d]$.

Известно, что функцию $y=f(x)$ называют возрастающей на промежутке D, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку, из условия $x_2>x_1$ следует, что $f(x_2)>f(x_1)$. Функцию $y=\varphi(x)$ называют убывающей на промежутке D, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку, из условия $x_2>x_1$ следует, что $f(x_2)<f(x_1)$.

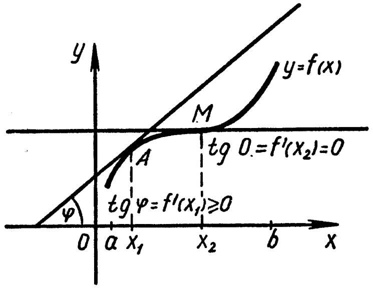


Рис. 63

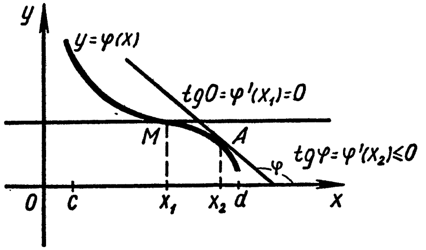


Рис. 64

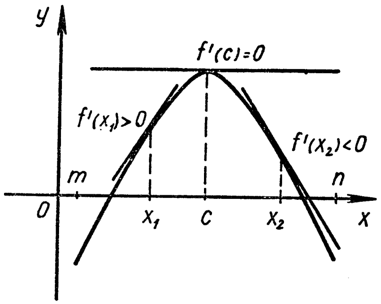


Рис. 65

Касательная в каждой точке графика возрастающей функции, как видно из рисунка 63, образует с положительным направлением оси Ox либо острый угол, либо угол, равный нулю (в последнем случае касательная параллельна оси Ox). Исходя из геометрического смысла производной $\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$. Это означает, что производная в каждой точке промежутка $[a;\ b]$ неотрицательна, поэтому для возрастающей функции $f(x)$ выполняется условие $f'(x) \geqslant 0$.

Касательная в каждой точке графика убывающей функции (рис. 64) образует с осью Ox либо тупой угол, либо угол, равный нулю, поэтому для функции $\varphi(x)$, убывающей на $[c;\ d]$, выполняется условие $\varphi'(x) \leqslant 0$.

Из рисунка 65 видно также, что одна и та же функция может на одних промежутках области ее определения возрастать, а на других — убывать. Характер поведения функции на каждом из этих промежутков определяется знаком ее производной.

Теорема 1. ***Если функция $f(x)$ дифференцируема и возрастает на промежутке $]a;\ b[$, то ее производная на этом промежутке не отрицательна.***

Дано: $y = f(x)$ возрастает на $]a;\ b[$; $f'(x)$ существует при $x \in\ ]a;\ b[$.

Доказать: $f'(x) \geqslant 0$ при $x \in\ ]a;\ b[$.

Доказательство. Пусть $x \in\ ]a;\ b[$. Выберем Δx таким, чтобы $x + \Delta x \in\ ]a;\ b[$. Возможны два случая:

а) $\Delta x > 0$, тогда $x + \Delta x > x$ и $f(x + \Delta x) > f(x)$ в силу возрастания функции $y = f(x)$. Имеем: $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y > 0$.

б) $\Delta x < 0$, тогда $x + \Delta x < x$ и $f(x + \Delta x) < f(x)$ по той же причине. Имеем: $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y < 0$.

В обоих случаях приращение функции имеет тот же знак, что и Δx, значит, $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$.

По условию в каждой точке $x \in\ ]a;\ b[$ функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Но предел выражения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, принимающего только положительные значения, не может быть отрицательным, поэтому $f'(x) \geqslant 0$.

Теорема 2. ***Если функция $f(x)$ дифференцируема и убывает на промежутке $]a;\ b[$, то ее производная на этом промежутке не положительна.***

Задание. Докажите теорему 2 самостоятельно.

Теоремы 1—2 выражают необходимые признаки возрастания и убывания функции на промежутке. Для решения задач особенно важны обратные теоремы, выражающие достаточные признаки возрастания и убывания функции на промежутке. Приведем формулировки этих теорем.

Теорема 3. ***Если производная $f'(x)$ на промежутке $]a;\ b[$ положительна, то функция $f(x)$ возрастает на этом промежутке.***

Теорема 4. ***Если производная $f'(x)$ на промежутке $]a;\ b[$ отрицательна, то функция $f(x)$ убывает на этом промежутке.***

Теоремы 3—4 примем без доказательства.

Приведем примерный план отыскания промежутков возрастания и убывания функции.

1. Находим область определения заданной функции $y = f(x)$.
2. Вычисляем производную $f'(x)$.
3. Решая неравенство:

а) $f'(x) > 0$, находим промежутки возрастания функции $y = f(x)$;

б) $f'(x) < 0$, находим промежутки убывания функции $y = f(x)$.

Решение неравенств выполняется аналитически, графически либо методом промежутков.

Пример 1. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 - 5x^2 - 32x + 9$.

Решение. 1. Область определения функции: $D(f) =]-\infty;\ \infty[$.

2. Вычисляем производную: $f'(x) = 3x^2 - 10x - 32$.

3. Решаем неравенства: а) $f'(x) > 0$; б) $f'(x) < 0$. При этом замечаем, что $f'(x) = 0$ при $x = \frac{16}{3}$ и $x = -2$, поэтому $f'(x) = 3x^2 - 10x - 32 = 3\left(x - \frac{16}{3}\right)(x + 2)$.

а) $f'(x) = 3x^2 - 10x - 32 > 0$; $3\left(x - \frac{16}{3}\right)(x + 2) > 0$; $f'(x) > 0$ в каждом из промежутков $]-\infty;\ -2[$; $\left]\frac{16}{3};\ \infty\right[$ (рис. 66);

б) $f'(x) = 3x^2 - 10x - 32 < 0$; $3\left(x - \frac{16}{3}\right)(x + 2) < 0$; $f'(x) < 0$ в промежутке $\left]-2;\ \frac{16}{3}\right[$ (рис. 66).

Ответ: функция возрастает на каждом из промежутков $]-\infty;\ -2]$ и $\left[\frac{16}{3};\ \infty\right[$, убывает на промежутке $\left[-2;\ \frac{16}{3}\right]$.

Пример 2. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 5$.

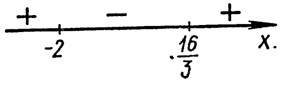


Рис. 66

Решение. 1. Данная функция определена на множестве всех действительных чисел:

$$D(f) =]-\infty;\ \infty[.$$

2. Находим производную заданной функции: $f'(x)=x^2-2x-3$.

3. Решая уравнение $x^2-2x-3=0$, определяем точки $x=-1$ и $x=3$, в которых производная равна нулю.

4. Точками $x=-1$ и $x=3$ разбиваем область определения функции $]-\infty;\ \infty[$ на числовые промежутки $]-\infty;\ -1[$; $]-1;\ 3[$; $]3;\ \infty[$.

5. Определяем знак производной на каждом из полученных числовых промежутков и делаем заключение о поведении функции на этом промежутке. (Знак производной на каждом из промежутков может быть найден непосредственным вычислением ее значения в одной из точек этого промежутка.) Результаты исследования оформляем в виде таблицы:

x	$]-\infty;\ -1[$	$]-1;\ 3[$	$]3;\ \infty[$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	возрастает	убывает	возрастает

Ответ. Функция возрастает на каждом из промежутков $]-\infty;\ -1]$, $[3;\ \infty[$, убывает на промежутке $[-1;\ 3]$.

Пример 3. Найдите интервалы возрастания и убывания функции $f(x)=\frac{2x}{1-x^2}$.

Решение. 1. Область определения функции: $]-\infty;\ -1[$, $]-1;\ 1[$ и $]1;\ \infty[$.

2. $f'(x)=2\cdot\frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$.

3. $f'(x)=\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}>0$ при $x\in D(f)$ (значения $x=1$ и $x=-1$ не рассматриваются, так как в этих точках заданная функция не определена).

4. На промежутках $]-\infty;\ -1[$; $]-1;\ 1[$; $]1;\ \infty[$ заданная функция возрастает.

Упражнения

1. Сформулируйте определения возрастания и убывания функции. Приведите примеры возрастающих и убывающих функций.

2. Приведите пример функции, заданной на промежутке $[-2;\ 2]$, возрастающей на промежутке $[-2;\ 0]$ и убывающей на промежутке $[0;\ 2]$.

3. Изобразите схематический рисунок графика функции, заданной на промежутке $]-1;\ 4[$, имеющей положительную производную на промежутке $]-1;\ 2[$ и отрицательную производную на промежутке $]2;\ 4[$, если: а) $f'(2)=0$; б) $f'(2)$ не существует.

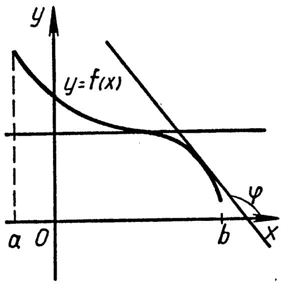


Рис. 67

4. Запишите символически теоремы о связи возрастания и убывания функции со знаком ее производной.

5. Расскажите о плане исследования функции на возрастание и убывание с помощью производной.

6. Постройте в одной и той же системе координат графики функций $y=x^2$ и $y=2x$. Расскажите о связи убывания (возрастания) функции и знака ее производной.

7. Найдите область определения функций:

а) $y=\frac{2}{x+3}$; б) $f(x)=\frac{3x+1}{x^2+5x-14}$; в) $\varphi(t)=2\sqrt{3t+9}$;

г) $y=\sqrt{\frac{4}{x-1}}$; д) $z=\sqrt{3x^2-5x+2}$; е) $h=\sqrt{\frac{u+5}{2u-4}}$.

8. Анализируя рисунок 67, объясните, почему производная функции $f(x)$, убывающей на промежутке $]a;\ b[$, неположительна.

9. Установите промежутки возрастания и убывания функции по ее графику, изображенному на рисунках: а) 68; б) 69; в) 70.

10. Вместо точек восстановите соответствующий текст:

а) если $f'(x)\geqslant 0$ при всех $x\in\ ]a;\ b[$, то ...;

б) если ... , то $f(x)$ не возрастает в этом промежутке.

11. В каких точках области определения дифференцируемой функции ее возрастание сменяется убыванием и обратно: убывание — возрастанием?

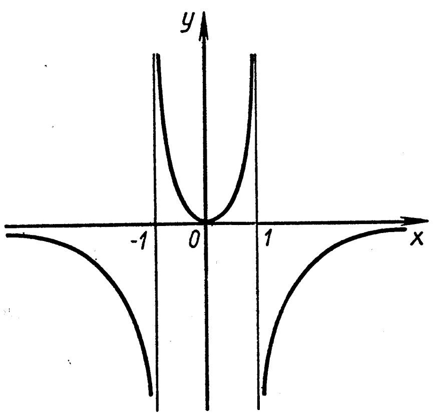


Рис. 68

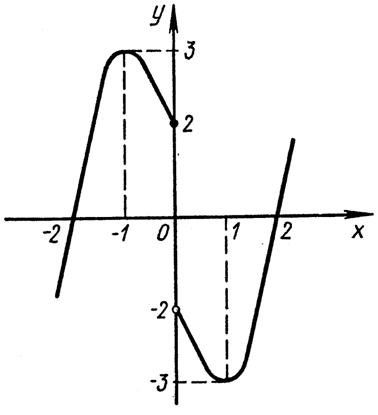


Рис. 69

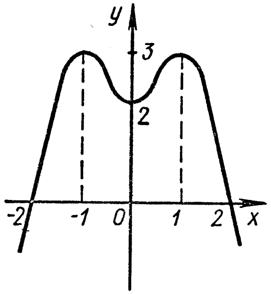


Рис. 70

12. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$, если:

а) $y=3x+2$;
б) $y=-8x+7$;
в) $y=x^2+x-2$;
г) $y=2x^3-24x$;
д) $y=x^3-2x^2+x-1$;
е) $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3$;
ж) $y=x^4-2x^2+4$;
з) $y=\frac{3}{x-1}$;
и)* $y=\frac{1}{x}+4x^2$;
к) $y=2\sqrt{x}$;
л) $y=2x^3-5x^2+4x-1$.

§ 32. МАКСИМУМ И МИНИМУМ ФУНКЦИИ

В предыдущем параграфе была установлена связь между знаком производной и возрастанием или убыванием функции на некотором промежутке.

Например, на промежутке $]a;\ c[$ (рис. 71) $f'(x)<0$, поэтому на этом промежутке функция $f(x)$ убывает; на промежутке $]c;\ b[$ $f'(x)>0$, поэтому функция возрастает на этом промежутке.

В данном параграфе рассмотрим внутренние точки области определения функции, в которых ее производная обращается в нуль или не существует.

Такой точкой, например, является точка $x=c$ (рис. 71). $f'(c)=0$, так как касательная к графику функции в точке $(c;\ f(c))$ параллельна оси абсцисс ($\alpha=0$, поэтому $f'(c)=\operatorname{tg}\alpha=0$).

Пусть на промежутке $]a;\ b[$ задана непрерывная функция $y=f(x)$. График ее изображен на рисунке 72. Рассматривая его, видим, что в точках x_1 и x_3 функция имеет значения, большие по сравнению с ее значениями во всех точках, достаточно близких к точкам x_1 и x_3.

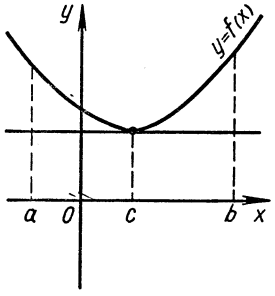


Рис. 71

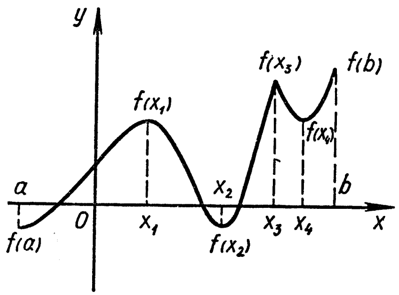


Рис. 72

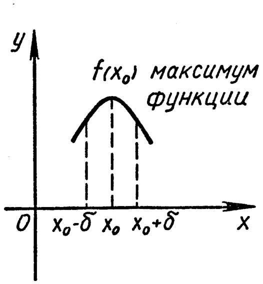


Рис. 73

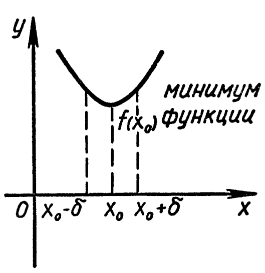


Рис. 74

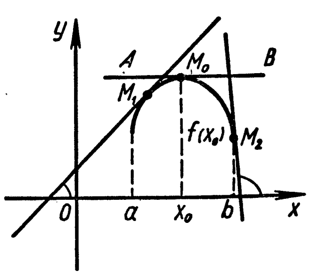


Рис. 75

В точках x_2 и x_4 значения этой функции меньше по сравнению с ее значениями во всех точках, достаточно близких к точкам x_2 и x_4.

Значения аргумента x_1 и x_3 называются *точками максимума* функции, а x_2 и x_4 — *точками минимума* функции.

Значения функции $y=f(x)$ в точках максимума называют максимумом функции, а в точках минимума — минимумом функции.

Обратите внимание на то, что в точках максимума и минимума производная данной функции равна нулю или не существует. Так, $f'(x_1)=0$; $f'(x_2)=0$; $f'(x_3)$ не существует; $f'(x_4)=0$.

Определение 1. **Точка x_0 из области определения функции $f(x)$ называется точкой максимума этой функции, если существует такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$** (рис. 73).

Определение 2. **Точка x_0 из области определения функции $f(x)$ называется точкой минимума этой функции, если существует такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$** (рис. 74).

Еще раз подчеркнем, что x_0 — внутренняя точка области определения функции.

Точки максимума и минимума функции $f(x)$ называют точками ее *экстремума*[1], а значения функции в этих точках (максимум и минимум функции) — *экстремумами функции.*

Максимум $f(x_0)$ функции обозначается так: $f_{\max}=f(x_0)$ (рис. 73). Минимум $f(x_0)$ функции обозначают так: $f_{\min}=f(x_0)$ (рис. 74).

Одна и та же функция в области определения может иметь несколько максимумов и минимумов, причем минимум может оказаться равным или большим максимума.

---

[1] «Экстремум» — латинское слово. В переводе на русский язык означает «крайний».

Функция $y=f(x)$ (рис. 72) в области определения $]a;\ b[$ имеет два максимума $f(x_1)$, $f(x_3)$ и два минимума $f(x_2)$, $f(x_4)$, причем минимум функции $f(x_4)$ больше ее максимума $f(x_1)$.

Задание 1. Начертите схематический график функции $y=\varphi(x)$, которая: а) определена на промежутке $[-5;\ 5]$ и $f(-5)=f(5)=3$;

б) имеет два максимума в точках $x=-3$ и $x=4$ и минимум в точке $x=2$, причем $f_{\max}=f(-3)=5$ и $f_{\max}=f(4)=7$, а $f_{\min}=f(2)=-1$.

Теорема Ферма[1] (необходимое условие существования экстремума дифференцируемой функции). ***Если функция имеет производную в каждой точке некоторого промежутка и x_0 — точка экстремума, то в этой точке производная равна нулю.***

Ограничимся геометрической иллюстрацией этой теоремы для функции $y=f(x)$, график которой изображен на рисунке 75. Значение производной равно угловому коэффициенту касательной. Касательная к кривой $y=f(x)$ в любой ее точке M_1, расположенной левее точки M_0, образует острый угол с положительным направлением оси Ox, а в любой точке M_2 кривой, расположенной правее точки M_0, образует тупой угол с положительным направлением оси Ox. Значит, $f'(x)>0$ при $x\in\,]a;\ x_0[$ и $f'(x)<0$ при $x\in\,]x_0;\ b[$.

По условию производная существует в каждой точке промежутка $]a;\ b[$. При переходе через точку x_0 ее положительные значения меняются на отрицательные, поэтому в точке x_0 производная обращается в нуль: $f'(x_0)=0$. Касательная AB к кривой $y=f(x)$ в точке M_0 параллельна оси Ox, так как $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha=0$, откуда $\alpha=0$.

Задание 2. Разъясните геометрический смысл теоремы Ферма для случая, когда $x_0\in\,]a;\ b[$ есть точка минимума функции $y=f(x)$.

Из теоремы Ферма следует: 1) если функция имеет производную на промежутке $]a;\ b[$, то ее экстремум надо искать в точках, в которых производная обращается в нуль; 2) если функция на промежутке $]a;\ b[$ имеет производную, которая не обращается в нуль ни в одной точке этого промежутка, то данная функция экстремума не имеет.

Замечание. Функция может иметь в некоторой точке, принадлежащей области ее определения, максимум или минимум и в случае, если производная в этой точке не существует.

Например, функция $f(x)=1-|x|$ (рис. 76) в точке $x=0$ имеет максимум: $f_{\max}=f(0)=1$, однако производная ее в этой точке не существует.

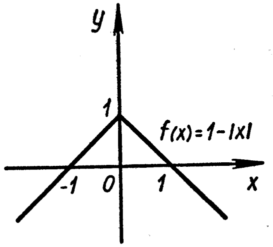


Рис. 76

Аналогично функция $\varphi(x)=\sqrt[3]{x^2}$ (рис. 77) в точке $x=0$ имеет минимум: $\varphi_{\min}=\varphi(0)=0$, однако ее производная $\varphi'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ в точке $x=0$ не существует.

Определение. **Внутренние точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует, называются критическими.**

Пример 1. Найдите критические точки функции $y=x^2-4x$.

Решение. $y'=2x-4$, $y'=0$, $2x-4=0$, $x=2$ — критическая точка.

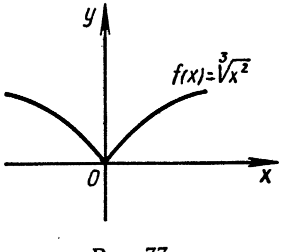


Рис. 77

Пример 2. Найдите критические точки функции $y=\dfrac{1}{x}$.

Решение. Область определения данной функции $]-\infty;\ 0[\,\cup\,]0;\ \infty[$, $y'=-\dfrac{1}{x^2}$, $y'\neq 0$ при $x\in D(y)$; y' не существует при $x=0$, но $0\notin D(y)$. Функция $y=\dfrac{1}{x}$ не имеет критических точек.

Функция может иметь экстремум только в критических точках. Однако наличие критических точек у функции $y=f(x)$ не гарантирует существование у нее экстремумов. Так, для функции $y=x^3$ точка $x=0$ критическая ($y'=3x^2$, $y'=0$ при $x=0$), но экстремума в этой точке функция не имеет (рис. 78).

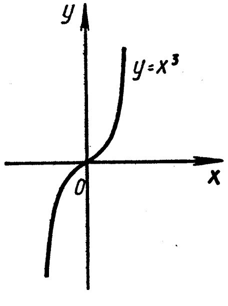


Рис. 78

Функция может не иметь экстремума в критической точке, производная в которой не существует.

Так, функция

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{при } x\leqslant 0,\\ x^2+1 & \text{при } x>0,\end{cases}$$

как видно из рисунка 79, в точке $x=0$ не имеет экстремума. Однако эта точка для данной функции является критической, так как не существует касательной к графику этой функции в точке M, поэтому производная в этой точке также не существует.

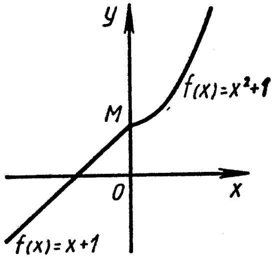


Рис. 79

---

[1] Пьер Ферма (1601—1665) — французский математик. Вместе с Декартом он является основоположником аналитической геометрии, а с Паскалем — основоположником теории вероятности. Ферма также был одним из крупнейших специалистов в области теории чисел.

Итак, наличие у функции критических точек является необходимым условием для существования у нее экстремума, но это условие не является достаточным.

Теорема (достаточные условия существования экстремума функции). ***Дана функция $f(x)$, непрерывная в точке x_0 и дифференцируемая в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, в самой точке x_0. Если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0:***

а) ***меняет знак с плюса на минус, то точка x_0 является точкой максимума функции;***

б) ***меняет знак с минуса на плюс, то точка x_0 является точкой минимума функции;***

Проведем доказательство теоремы только для случая а).

Дано: $f'(x)>0$, если $x \in]x_0-\delta;\ x_0[$;
$f'(x)<0$, если $x \in]x_0;\ x_0+\delta[$;
$f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Доказать: x_0 — точка максимума, т. е. $f(x)<f(x_0)$ при $x \in]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$.

Доказательство. По условию при $x \in]x_0-\delta;\ x_0[$ $f'(x)>0$, функция $f(x)$ слева от точки x_0 возрастает. Так как она непрерывна в точке x_0, то $f(x)<f(x_0)$ для всех $x \in]x_0-\delta;\ x_0[$.

При $x \in]x_0;\ x_0+\delta[$ $f'(x)<0$, функция $y=f(x)$ убывает. В силу ее непрерывности в точке x_0 $f(x)<f(x_0)$ для всех $x \in]x_0;\ x_0+\delta[$.

Таким образом, для любого x, принадлежащего окрестности точки x_0, $f(x)<f(x_0)$. Это означает, что x_0 — точка максимума функции $f(x)$: $f_{\max}=f(x_0)$.

Задание. Докажите теорему для случая б) самостоятельно.

На рисунке 80 изображен график функции $y=f(x)$. При переходе через точку x_0 знак производной $f'(x)$ меняется с плюса на минус ($\operatorname{tg}\alpha>0$, $\operatorname{tg}\beta<0$). Поэтому по доказанной теореме точка x_0 является точкой максимума данной функции.

На рисунке 81 изображен график функции $y=\varphi(x)$. При переходе через точку x_0 знак производной $\varphi'(x)$ меняется с минуса на плюс ($\operatorname{tg}\alpha<0$; $\operatorname{tg}\beta>0$). Поэтому точка x_0 является точкой минимума данной функции.

На рисунке 82 изображен график функции $y=g(x)$. При переходе через точку x_0 знак производной $g'(x)$ не меняется ($\operatorname{tg}\alpha>0$; $\operatorname{tg}\beta>0$). Поэтому точка x_0 не является точкой экстремума данной функции, хотя данная точка является критической, так как $f'(x_0)=0$.

Необходимое и достаточное условие существования экстремума функции $f(x)$ позволяет наметить план нахождения ее экстремумов на промежутке $]a;\ b[$ ее области определения.

1. Находим $f'(x)$.

2. Определяем критические точки функции $f(x)$, т. е. точки, в которых $f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует. Располагаем критические точки в порядке их возрастания.

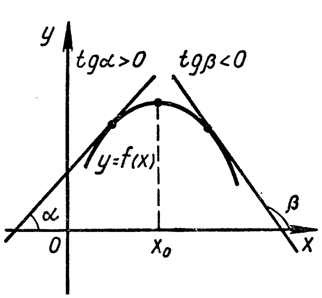


Рис. 80

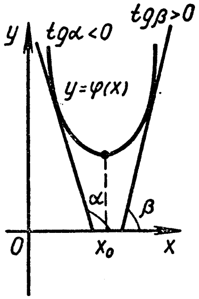


Рис. 81

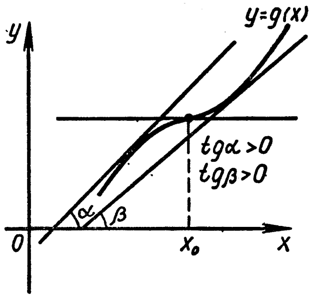


Рис. 82

3. Определяем знак $f'(x)$ на каждом из промежутков, на которые разделили промежуток $]a;\ b[$ критические точки.

4. Пользуясь достаточными условиями существования экстремумов, находим точки максимума и минимума.

5. Находим экстремальные значения функции в точках максимума и минимума.

Если не указан интервал, на котором исследуется функция $y=f(x)$ на экстремум, то вначале следует найти область ее определения, а потом проводить исследование на этой области по приведенному выше плану.

Пример 1. Исследуйте на экстремум функцию $f(x)=x^3-3x$.

Решение. Область определения данной функции — множество всех действительных чисел.

1. $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)$.

2. Решая уравнение $3(x-1)(x+1)=0$, находим критические точки функции: $x_1=-1$ и $x_2=1$.

3. Разбиваем точками $x_1=-1$, $x_2=1$ область определения функции на промежутки. $]-\infty;\ -1[$; $]-1;\ 1[$; $]1;\ \infty[$, устанавливаем знак производной на каждом из них и находим экстремумы функции, составляя таблицу (символ ↗ означает, что функция возрастает, а символ ↘ означает, что функция убывает):

x	$]-\infty;\ -1[$	-1	$]-1;\ 1[$	1	$]1;\ \infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗
		max		min	

В точке $x=-1$ функция $f(x)=x^3-3x$ имеет максимум: $f_{\max}=f(-1)=2$, в точке $x=1$ — минимум: $f_{\min}=f(1)=-2$.

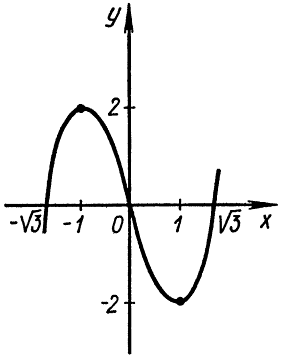


Рис. 83

График данной функции схематически изображен на рисунке 83.

Упражнения

1. Вместо точек вставьте слова, чтобы получились верные утверждения: а) если функция $f(x)$ непрерывная на промежутке $]a; b[$ на промежутке $]a; x_0[$ убывает, а на промежутке $]x_0; b[$ возрастает, то данная функция в точке x_0 имеет ...; б) если функция $f(x)$ непрерывная на промежутке $]a; b[$ на промежутке $]a; x_0[$ ..., а на промежутке $]x_0; b[$ ..., то данная функция в точке x_0 имеет максимум.

2. Укажите точки экстремума и экстремальные значения функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 84.

3. Какие точки называют точками экстремума функции?

4. Какие значения функции называют экстремальными и как они обозначаются?

5. Изобразите схематический график какой-либо функции $y = f(x)$, определенной и непрерывной на промежутке $]-2; 2[$ и имеющей максимум в трех точках, а минимум в двух точках.

6. Может ли функция $f(x)$, непрерывная на промежутке $]a; b[$, иметь на этом промежутке три максимума и один минимум?

7. Начертите схематический график какой-либо функции $y = f(x)$, которая: а) определена на промежутке $[0; 6]$ и $f(0) = f(6) = 0$; б) имеет два минимума в точках $x = 2$ и $x = 4$ и максимум в точке $x = 3$, причем $f_{\min} = f(2) = f(4) = -3$, $f_{\max} = f(3) = 0$.

8. В чем состоит необходимое условие существования экстремума функции?

9. Какие точки называются критическими точками?

10. Верны ли утверждения:

а) если точка x_0 есть точка экстремума функции $f(x)$, то она ее критическая точка;

б) если точка x_0 есть критическая точка функции $f(x)$, то она ее точка экстремума?

11. Верны ли утверждения:

а) если функция не имеет критических точек, то она не имеет и точек экстремума;

б) точки, в которых $f'(x) = 0$, являются точками экстремума функции;

в) в точках экстремума функции ее производная равна нулю;

г) в точках экстремума функции ее производная существует?

12. Сформулируйте достаточные условия существования экстремума функции.

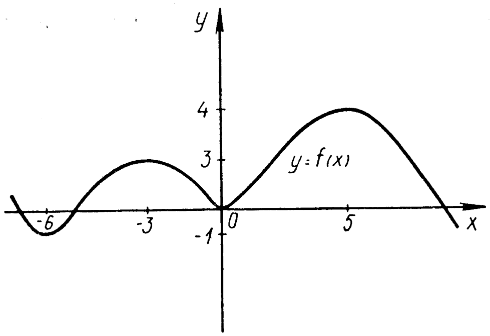


Рис. 84

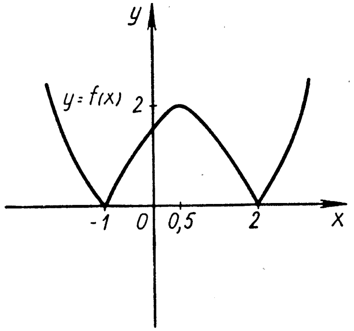


Рис. 85

13. Проиллюстрируйте на графиках достаточные условия существования экстремума функции.

14. Расскажите о плане исследования функции на экстремум.

15. Проанализируйте график функции $y = f(x)$, изображенный на рисунке 85, проверьте правильность заполнения таблицы:

x	$]-\infty; -1[$	-1	$]-1; 0{,}5[$	$0{,}5$	$]0{,}5; 2[$	2	$]2; \infty[$
$f'(x)$	$-$	не существ.	$+$	0	$-$	не существ.	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	2	↘	0	↗
		min		max		min	

16. Проанализируйте график функции $y = f(x)$, изображенный на рисунке 86, и заполните таблицу:

x	$]-\infty; -1[$	-1	$]-1; 0[$	0	$]0; 1[$	1	$]1; \infty[$
$f'(x)$							
$f(x)$							

17. Постройте схематический график функции, определенной и непрерывной при $x \in \mathbf{R}$, исходя из ее свойств, указанных в таблице:

x	$]-\infty; -3[$	-3	$]-3; 2[$	2	$]2; \infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-3	↗
		max		min	

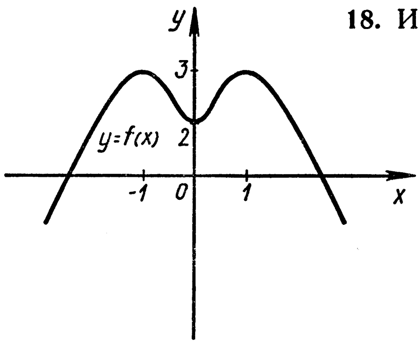


Рис. 86

18. Исследуйте на экстремум функции:

а) $f(x) = 5x - 3$;

б) $\varphi(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x$;

в) $g(x) = 2x + \frac{1}{2x}$;

г) $u(x) = 4x^3 + 12x^2 - 3$;

д) $\psi(x) = 2x^3 - 3x^2$;

е)* $v(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$.

19. Докажите, что функция $\varphi(x) = 3 + 3x - x^3$ принимает положительные значения при $x \leqslant 2$.

20. Исследуйте на экстремум функцию $y = f(x)$ и постройте ее схематический график, если:

а) $f(x) = 1 + 4x - x^2$;

б) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 5$;

в) $f(x) = \frac{x+6}{x^2+13}$;

г)* $f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,(x-2)$.

§ 33. ИССЛЕДОВАНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

В данном параграфе на примере квадратичной функции будет показано применение производной к исследованию функции и построению их графиков. Напомним, что квадратичной функцией называют функцию вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — действительные числа, $a \neq 0$, x — переменная. Графиком квадратичной функции является парабола.

Пример 1. Исследуйте функцию $f(x) = x^2 - 2x - 3$ и постройте ее график.

Решение. 1. Областью определения квадратичной функции является множество всех действительных чисел: $D(f) = \boldsymbol{R}$.

2. Функция $f(x)$ непрерывна на всей области своего определения как многочлен (см. § 18).

3. Найдем критические точки функции. Для этого необходимо решить уравнение $f'(x) = 0$, $f'(x) = 2x - 2$, $2x - 2 = 0$, $x = 1$.

4. Найдем промежутки возрастания и убывания функции, точку экстремума и экстремальное значение функции. Составим таблицу:

$f(1) = 1 - 2 - 3 = -4$.

x	$]-\infty;1[$	1	$]1;\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$
		min	

5. Находим нули функции. Для этого вычисляем ее дискриминант: $D = b^2 - 4ac$, $D = (-2)^2 - 4(-3) = 16 > 0$. Так как $D > 0$, то данная функция имеет два нуля (корня):

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\quad x_1 = \frac{2+\sqrt{16}}{2} = 3;$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a},\quad x_2 = \frac{2-\sqrt{16}}{2} = -1.$$

6. Находим точку пересечения параболы с осью ординат: при $x = 0$ $y = -3$. Парабола проходит через точку $(0; -3)$. Известно, что парабола симметрична относительно прямой, проходящей через ее вершину параллельно оси ординат. Поэтому точка $(2; -3)$, симметричная точке $(0; -3)$ относительно прямой $x = 1$, также принадлежит параболе. Строим параболу по найденным пяти ее точкам (рис. 87).

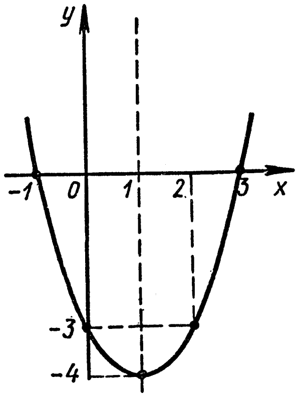


Рис. 87

Задание 1. Исследуйте функцию $f(x) = -x^2 + 3x + 10$ и постройте ее график.

Рассмотрим теперь исследование квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ в общем виде.

1. Областью определения квадратичной функции является множество всех действительных чисел: $D(f) = \boldsymbol{R}$.

2. Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ непрерывна на всей области своего определения как многочлен.

3. Найдем критические точки функции: $f'(x) = 2ax + b$, $2ax + b = 0$, $x = -\frac{b}{2a}$. Квадратичная функция имеет только одну критическую точку.

4. Найдем промежутки возрастания и убывания функции, точку экстремума и экстремальное значение функции. Составим две таблицы для случаев $a > 0$ и $a < 0$. Для удобства определения знака производной данной функции в окрестности точки $x = -\frac{b}{2a}$ представим ее в виде $f'(x) = 2a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

Случай $a > 0$

x	$]-\infty;-\frac{b}{2a}[$	$-\frac{b}{2a}$	$]-\frac{b}{2a};\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{D}{4a}$	$\nearrow$
		min	

Случай $a < 0$

x	$]-\infty;-\frac{b}{2a}[$	$-\frac{b}{2a}$	$]-\frac{b}{2a};\infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{D}{4a}$	$\searrow$
		max	

Квадратичная функция $f(x)=ax^2+bx+c$ в точке $x=-\frac{b}{2a}$ при $a>0$ имеет минимум

$$f_{\min}=f\left(-\frac{b}{2a}\right)=a\cdot\frac{b^2}{4a^2}+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=$$
$$=-\frac{b^2}{4a}+c=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{D}{4a};$$

при $a<0$ имеет максимум $f_{\max}=-\frac{D}{4a}$.

5. Найдем нули (корни) квадратичной функции:

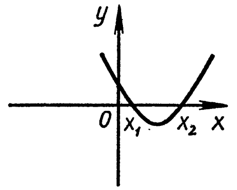
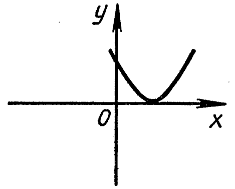
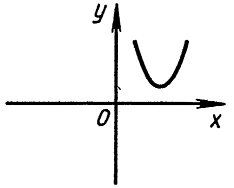
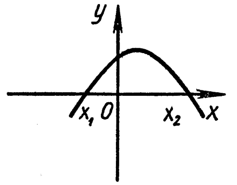
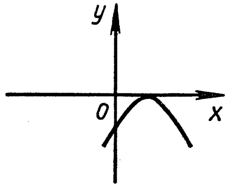
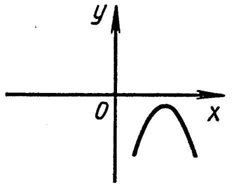
а) если $D=b^2-4ac>0$, то функция имеет два нуля: $x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, в этом случае парабола пересекает ось абсцисс в двух точках;

б) если $D=b^2-4ac=0$, то функция имеет один нуль: $x=-\frac{b}{2a}$, в этом случае парабола касается оси абсцисс;

в) если $D=b^2-4ac<0$, то функция нулей не имеет, в этом случае парабола не имеет общих точек с осью абсцисс.

6. Для построения параболы удобно найти точку пересечения ее с осью ординат $(0; c)$ и ей симметричную точку относительно прямой $x=-\frac{b}{2a}$ — оси симметрии параболы.

Исследование квадратичной функции приводит к следующим случаям расположения параболы на координатной плоскости:

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$a>0$			
$a<0$			

Умение строить график квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ позволяет находить решение квадратных неравенств: $ax^2+bx+c\geqslant 0$, $ax^2+bx+c\leqslant 0$.

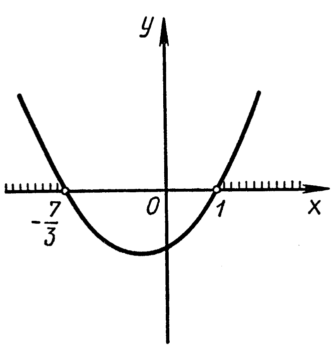


Рис. 88

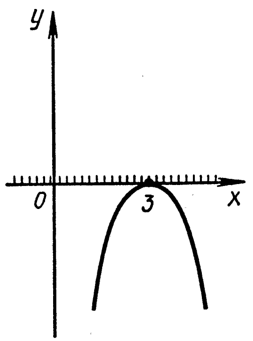


Рис. 89

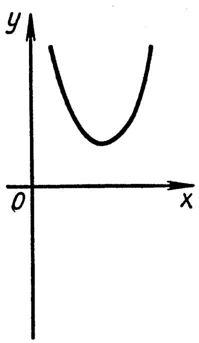


Рис. 90

Пример 2. Решите неравенство $3x^2+4x-7>0$.

Решение. Вычисляем дискриминант: $D=b^2-4ac=16+84=100>0$. Парабола $y=3x^2+4x-7$ пересекает ось Ox в двух точках. Из уравнения $3x^2+4x-7=0$ находим корни квадратичной функции: $x_1=-\frac{7}{3}$, $x_2=1$. Парабола пересекает ось Ox в двух точках: $\left(-\frac{7}{3};\ 0\right)$ и $(1;\ 0)$. Схематический график функции $y=3x^2+4x-7$ представлен на рисунке 88. Из этого рисунка видно, что $y>0$ при $x<-\frac{7}{3}$ или при $x>1$.

Ответ: $\left]-\infty;\ -\frac{7}{3}\right[\ \cup\ \left]1;\ \infty\right[$.

Пример 3. Решите неравенство $-x^2+6x-9<0$.

Решение. $D=36-36=0$. Парабола $y=-x^2+6x-9$ касается оси Ox. Абсциссу точки касания параболы с осью Ox находим, решая уравнение $x^2-6x+9=0$; $x=3$. Схематический график квадратичной функции $y=-x^2+6x-9$ изображен на рисунке 89. Из рисунка следует, что квадратичная функция $y=-x^2+6x-9$ принимает отрицательные значения при любом $x\neq 3$.

Ответ: $]-\infty;\ 3[\ \cup\ ]3;\ \infty[$.

Пример 4. Решите неравенство $x^2+5<4x$.

Решение. $x^2+5<4x$, $x^2-4x+5<0$, $D=16-20<0$. Квадратный трехчлен x^2-4x+5 не имеет действительных корней, поэтому его график не имеет общих точек с осью абсцисс.

Схематический график функции $y=x^2-4x+5$ изображен на рисунке 90. Из рисунка видно, что функция $y=x^2-4x+5$ отрицательных значений не принимает.

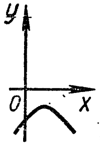
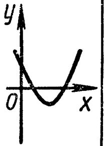
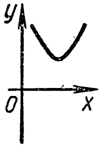
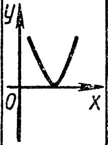
Ответ: $\varnothing$.

Задание 2. Решите неравенство $5x^2+9x-14\leqslant 0$.

Упражнения

1. На рисунках 91—94 изображены графики квадратичных функций. По графику каждой из них установите: а) знак параметра a; б) знак дискриминанта; в) знаки корней; г) решения неравенств $y>0$, $y<0$; д) экстремальные значения функций.

2. По образцу, приведенному в таблице, заполните пустые клеточки.

Знак дискриминанта	$D<0$		$D>0$		$D<0$	$D=0$	
Знак параметра	$a<0$		$a<0$		$a>0$	$a<0$	
Схематический график функции							

3. Известно, что функция $y=ax^2+bx+c$ в точке $x = -\frac{b}{2a}$ имеет: а) максимум; б) минимум. Какой вывод можно сделать относительно параметра a для каждого из этих случаев?

4. Исследуйте квадратичную функцию и постройте ее график:

а) $y=x^2-7x+12$; б) $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{9}{4}x+5$;

в) $\varphi(x)=-4x^2+2x-1$; г) $h(x)=2x-x^2-3$;

д) $z(x)=2x^2+7x$; е) $g(x)=-3x^2+5x-4$.

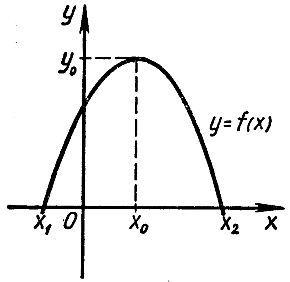


Рис. 91

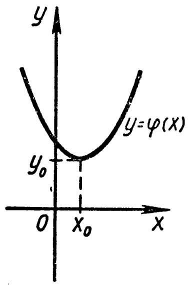


Рис. 92

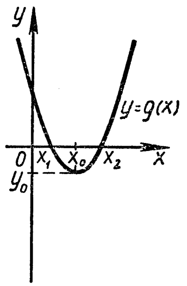


Рис. 93

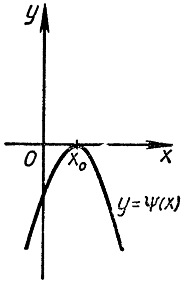


Рис. 94

5. Решите неравенства:

а) $x^2>2x$; б) $x^2-4\geqslant 0$;

в) $\frac{1}{2}x^2\leqslant x$; г) $2x^2-13x+15>0$;

д) $-4x^2+4x-1\leqslant 0$; е) $3x^2-5x+4>0$;

ж) $-3x^2+4x-10>0$; з) $\frac{1}{6}x^2-x+1{,}5<0$;

и) $(2x-1)(x+3)-(x+7)(x-1)-4x\leqslant 0$.

6. Докажите, что касательная, проведенная к кривой $f(x)=x^3-5x^2+9x+12$, в любой ее точке образует острый угол с положительным направлением оси абсцисс.

§ 34. ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЕ ГРАФИКА

Одна из основных задач математики состоит в исследовании функций (нахождении экстремальных значений, нулей, промежутков возрастания или убывания и других свойств). Применение производной значительно облегчает задачу исследования функции, а вместе с тем и построение ее графика.

Исследование функции и построение ее графика будем выполнять по такому плану.

1. Находим область определения функции.
2. Находим промежутки непрерывности функции.
3. Находим критические точки функции.
4. Находим промежутки возрастания и убывания, точки экстремума и экстремальные значения функции.
5. Находим нули (корни) функции, если они существуют.
6. Строим график функции.

Следует иметь в виду, что при построении графика функции не всегда нужно точно следовать указанному плану. Например, не всегда мы сможем найти нули функции, даже если они существуют. Иногда дополнительно находят координаты некоторых точек графика, например точки пересечения с осью ординат.

Рассмотрим примеры исследования функций и построения их графиков.

Пример 1. Исследуйте функцию $f(x)=x^3-3x^2$ и постройте ее график.

Решение. 1. Область определения данной функции — множество действительных чисел: $D(f)=\mathbb{R}$.

2. Данная функция непрерывна на множестве действительных чисел как многочлен.

3. Найдем критические точки функции:

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2),$$
$$f'(x)=0,\ 3x(x-2)=0,$$
$$x=0 \text{ или } x=2.$$

4. Составим таблицу:

x	$]-\infty;\ 0[$	0	$]0;\ 2[$	2	$]2;\ \infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗
		max		min	

Критические точки разбивают координатную прямую на три промежутка (рис. 95): $]-\infty;\ 0[$, $]0;\ 2[$, $]2;\ \infty[$. На рисунке 95 указаны знаки производной $f'(x)$ на каждом из этих промежутков, которые могут быть найдены непосредственным вычислением значений $f'(x)$ в одной из точек каждого промежутка либо решением неравенств $f'(x)>0$ и $f'(x)<0$; $f_{\max}=f(0)=0$, $f_{\min}=f(2)=2^3-3\cdot 2^2=-4$.

5. Найдем нули функции: $x^3-3x^2=0$, $x^2(x-3)=0$, $x=0$ или $x=3$.

Найдем координаты еще одной точки графика: если $x=-1$, то $f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)^2=-4$.

6. График данной функции изображен на рисунке 96.

Пример 2. Исследуйте функцию $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x$ и постройте ее график.

Решение. 1. Область определения функции: $D(y)=\mathbf{R}$.

2. Данная функция непрерывна на множестве действительных чисел.

3. Найдем критические точки функции: $y'=x^2-6x+8$, $y'=0$, $x^2-6x+8=0$, $x=2$ или $x=4$.

4. Составляем таблицу:

x	$]-\infty;\ 2[$	2	$]2;\ 4[$	4	$]4;\ \infty[$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	$\frac{20}{3}$	↘	$\frac{16}{3}$	↗
		max		min	

$$y_{\max}=y(2)=\frac{20}{3},\quad y_{\min}=y(4)=\frac{16}{3}.$$

5. Найдем нули функции: $\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x=0$, $x\left(\frac{1}{3}x^2-3x+8\right)=0$, $x=0$ или $\frac{1}{3}x^2-3x+8=0$. $x^2-9x+24=0$, $D=9^2-4\cdot 24<0$, квадратное уравнение корней не имеет. Данная функция имеет только один нуль: $x=0$. При $x=0$ $y=0$ — график функции проходит через начало координат.

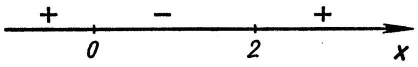


Рис. 95

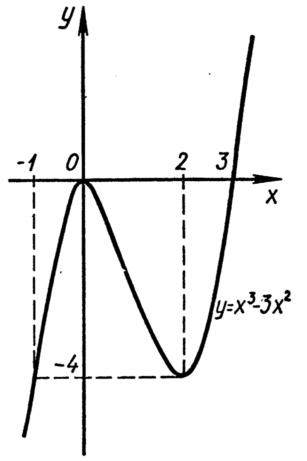


Рис. 96

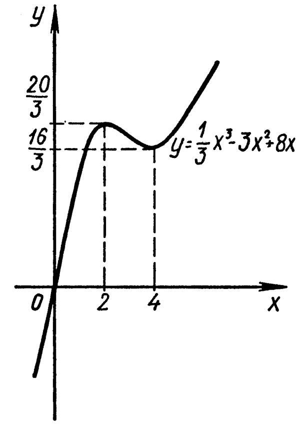


Рис. 97

6. График данной функции изображен на рисунке 97.

Пример 3. Исследуйте функцию $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$ и постройте ее график.

Решение. 1. Находим область определения функции: $x^2-1\neq 0, x\neq 1, x\neq -1, D(f)=]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ 1[\cup]1;\ \infty[$.

2. Данная функция непрерывна во всех точках области своего определения.

3. Находим критические точки функции:

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}.$$

Производная определена при $x\in D(f)$. $f'(x)=0$, $x^2(x^2-3)=0$, откуда $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=0$, $x_3=\sqrt{3}$.

Критические точки и точки $x=1$, $x=-1$, в которых данная функция не определена, разбивают координатную прямую на промежутки, изображенные на рисунке 98.

Для более удобного определения знака производной на каждом из этих промежутков представим производную в виде

$$f'(x)=\frac{x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x^2-1)^2},$$

$(x^2-1)^2>0$ при любых $x\neq\pm 1$,

$x^2>0$ при $x\neq 0$,

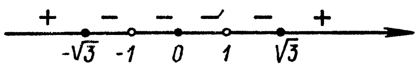


Рис. 98

$$f'(x)>0 \text{ на }]-\infty;\ -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};\ \infty[,$$

$$f'(x)<0 \text{ на }]-\sqrt{3};\ -1[\cup]-1;\ 1[\cup]1;\ \sqrt{3}[.$$

4. Составляем таблицу:

x	$]-\infty;$ $-\sqrt{3}[$	$-\sqrt{3}$	$]-\sqrt{3};$ $-1[$	$]-1;\ 0[$	0	$]0;\ 1[$	$]1;\ \sqrt{3}[$	$\sqrt{3}$	$]\sqrt{3};\ \infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{-3\sqrt{3}}{2}$	↘	↘	0	↘	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗
		max			нет экстремума			min	

$$f_{\max}=f(-\sqrt{3})=\frac{-3\sqrt{3}}{3-1}=\frac{-3\sqrt{3}}{2},$$

$$f(0)=\frac{0}{-1}=0,$$

$$f_{\min}=f(\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{3-1}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

5. Нули функции: $f(x)=0$ при $x=0$.

6. График данной функции изображен на рисунке 99.

Упражнения

1. По графику функции $y=f(x)$, изображенному на рисунке 100, установите: а) область определения функции; б) нули функции и интервалы ее знакопостоянства; в) точки экстремума, экстремальные значения функции и интервалы ее возрастания и убывания.

2. Функция $y=\varphi(x)$ определена и непрерывна при $x\in\boldsymbol{R}$. На рисунке 101 указаны все ее характеристические точки: x_1; x_2; x_3; x_4 — нули функции; m и n — точки минимума, 0 — точка максимума (соответствующие им точки M_1, M_3, M_2 принадлежат графику). Начертите схематический график этой функции. По графику назовите промежутки ее знакопостоянства, возрастания и убывания.

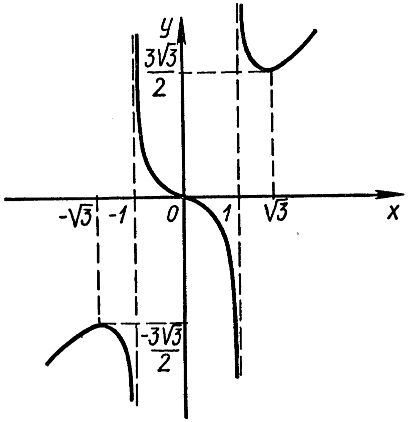


Рис. 99

3. На рисунке 102 изображен график функции $y=\varphi(x)$, определенной и непрерывной при $x\in\boldsymbol{R}$. По графику функции $y=\varphi(x)$ укажите ее свойства и заполните таблицу:

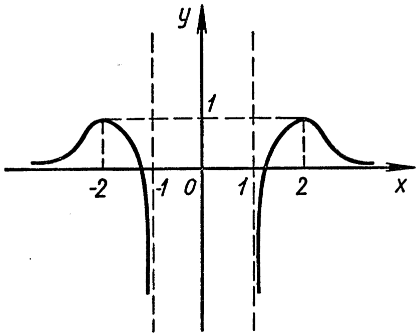


Рис. 100

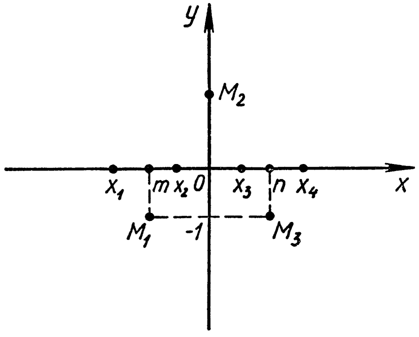


Рис. 101

x	$]-\infty;\ -1[$	-1	$]-1;\ 0[$	0	$]0;\ \infty[$
$\varphi'(x)$					
$\varphi(x)$					

4. Свойства функции $y=f(x)$ описаны в таблице. Изобразите схематический график функции, если она непрерывна на множестве всех действительных чисел.

x	$]-\infty;\ 1[$	1	$]1;\ \infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗
		min	

5. Изобразите схематически график функции $y=h(x)$, обладающей следующими свойствами: а) функция определена и непрерывна при $x\in\boldsymbol{R}$; б) функция обращается в нуль в точках $x=-4$, $x=0$ и $x=4$; $h(x)<0$ на промежутках $]-\infty;\ -4[\cup]0;\ 4[$; $h(x)>0$ на промежутках $]-4;\ 0[\cup]4;\ \infty[$; в) $x=-2$ — точка максимума функции, $h_{\max}=h(-2)=4$; $x=2$ — точка минимума функции, $h_{\min}=h(2)=-4$. На промежутках $]-\infty;\ -2[$, $]2;\ \infty[$ функция возрастает и на промежутке $]-2;\ 2[$ — убывает.

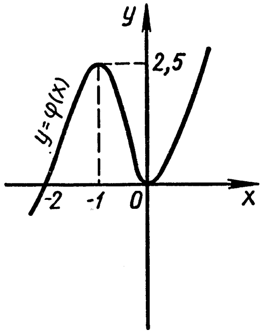


Рис. 102

6. Назовите основные пункты плана исследования функции.

7. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $f(x)=12x-x^3$;
б) $\varphi(x)=x^3-x^2$;
в) $\psi(x)=x^4-x^2$;
г) $y(x)=x^4-18x^2+17$;
д) $z(x)=(x-1)(x+1)^2$;
е)* $h(x)=x+\frac{1}{x}$;
ж)* $g(x)=\frac{1}{1-x^2}$.

§ 35. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

На рисунках 103 и 104 изображены графики функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, заданных на промежутке $[a;\ b]$. Первая из них возрастает, а вторая убывает на этом промежутке. На промежутке $[a;\ b]$ наименьшее значение функции $f(x)$ равно $f(a)$, а наименьшее значение функции $\varphi(x)$ равно $\varphi(b)$. Соответственно наибольшие значения этих функций на данном промежутке равны $f(b)$ и $\varphi(a)$. Таким образом, если функция непрерывна и возрастает (убывает) на каком-то промежутке, то наибольшее и наименьшее значения достигаются ею на концах этого промежутка.

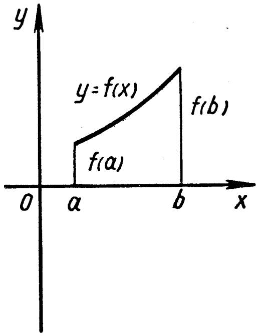


Рис. 103

На рисунке 105 изображены графики четырех функций. Анализ этих графиков показывает, что наибольшие и наименьшие значения функций, непрерывных на промежутке $[a;\ b]$, достигаются этими функциями либо на концах промежутка, либо в критических точках. Итак, функция на заданном промежутке принимает наибольшее или наименьшее значение в критических точках или на концах промежутка.

Наибольшее или наименьшее значение функции $y=f(x)$, непрерывной на промежутке $[a;\ b]$, будем находить по плану.

1. Найдем критические точки функции $y=f(x)$ на промежутке $[a;\ b]$.
2. Вычислим значения функции в этих точках и на концах промежутка $[a;\ b]$.
3. Из всех полученных значений функции выбираем наибольшее или наименьшее.

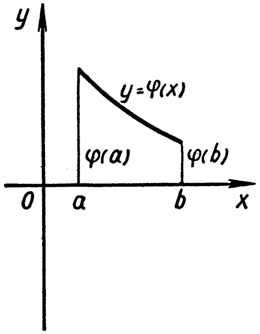


Рис. 104

Пример. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=6x^3-3x^2-12x+7$ на промежутке $[-1;\ 2]$.

Решение. 1. Находим критические точки заданной функции:

$$f'(x)=18x^2-6x-12,\ f'(x)=0;$$
$$18x^2-6x-12=0,$$
$$x=1 \text{ или } x=-\frac{2}{3}.$$

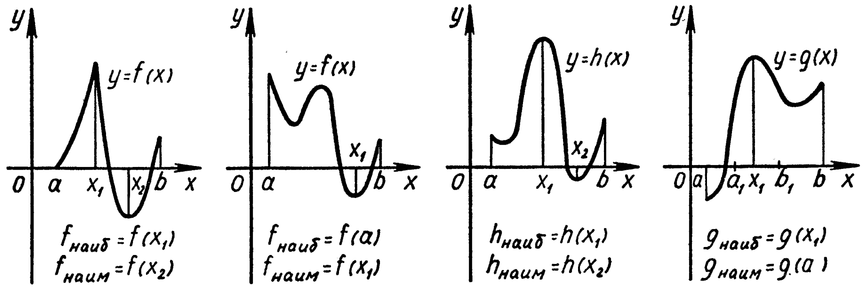


Рис. 105

2. Вычисляем значения функции в критических точках и на концах заданного отрезка $[-1;\ 2]$:

$$f\left(-\frac{2}{3}\right)=6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2-12\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+7=11\frac{8}{9};$$
$$f(1)=6\cdot 1^3-3\cdot 1^2-12\cdot 1+7=-2;$$
$$f(-1)=6\cdot(-1)^3-3\cdot(-1)^2-12\cdot(-1)+7=10;$$
$$f(2)=6\cdot 2^3-3\cdot 2^2-12\cdot 2+7=19.$$

3. Из полученных значений функции выбираем наименьшее и наибольшее: $f_{\text{наим}}=f(1)=-2$, $f_{\text{наиб}}=f(2)=19$.

Задание 1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=2x^3-6x+1$ на промежутке $[0;\ 2]$.

Замечание. При решении многих практических задач приходится находить наибольшие или наименьшие значения функций. В таких задачах функция, как правило, не задается, и ее необходимо составить по условию задачи.

Заметим, что если функция принимает наибольшее (или наименьшее) значение на промежутке в некоторой точке x_0, то на любом промежутке, являющемся частью данного и содержащем точку x_0, эта функция будет принимать наибольшее (или наименьшее) значение в той же точке. Например, функция $y=g(x)$, график которой изображен на рисунке 105, принимает наибольшее значение на промежутке $[a;\ b]$ в точке x_1. Ясно, что эта функция в точке x_1 будет принимать наибольшее значение на любом промежутке $[a_1;\ b_1]$, являющемся частью промежутка $[a;\ b]$ и содержащем точку x_1. Этим свойством часто пользуются при решении практических задач.

Задача 1. Имеется проволока длиной 200 м. Требуется оградить ею прямоугольный участок наибольшей площади. Найдите размеры участка.

Решение. 1. Обозначим длину одной из сторон искомого прямоугольника x (в м), тогда длина другой стороны будет равна $(100-x)$ (в м).

2. Площадь $S(x)$ прямоугольника выражается формулой

$$S(x)=x\cdot(100-x)=-x^2+100x.$$

3. Найдем критические точки функции $S(x)$: $S'(x) = -2x + 100$, $-2x + 100 = 0$, $x = 50$ — критическая точка.

По условию задачи функция $S(x) = -x^2 + 100x$ рассматривается на промежутке $]0;\ 100[$. В соответствии с приведенным выше замечанием найдем ее наибольшее значение на промежутке $[10;\ 60]$, содержащем критическую точку $x = 50$.

$$S(10) = -100 + 1000 = 900;$$
$$S(50) = -50^2 + 100 \cdot 50 = -2500 + 5000 = 2500;$$
$$S(60) = -60^2 + 100 \cdot 60 = 2400.$$

Таким образом, $S_{\text{наиб}} = S(50) = 2500$.

Ответ: участок имеет форму квадрата 50×50 м.

Задание 2. Требуется огородить забором участок земли прямоугольной формы заданной площади 800 м². Данный участок примыкает к зданию, поэтому с одной из сторон ограду строить не надо (рис. 106). Найдите размеры такого участка, чтобы длина забора была наименьшей.

Задача 2. Прочность балки с прямоугольным сечением изменяется прямо пропорционально произведению ее ширины на квадрат высоты. Каковы должны быть размеры сечения балки наибольшей прочности, если балка выпилена из круглого бревна диаметра d (рис. 107)?

Решение. 1. Пусть x (в м) — длина одной из сторон сечения балки, тогда $\sqrt{d^2 - x^2}$ (в м) — длина другой стороны сечения.

2. Прочность P балки как функция аргумента x согласно условию выражается формулой $P = kx \cdot (d^2 - x^2)$, где k — некоторое число.

3. Исследуем функцию $P(x)$ на экстремум: $P'(x) = k(d^2 - x^2 - 2x^2) = k(d^2 - 3x^2)$, $P'(x) = 0$, $d^2 - 3x^2 = 0$, $x = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{d\sqrt{3}}{3}$ — критическая точка (берем положительный корень).

Функция $P(x)$ рассматривается на промежутке $]0;\ d[$. В соответствии с приведенным выше замечанием найдем ее наибольшее значение на промежутке $\left[\frac{d}{3};\ \frac{2d}{3}\right]$, содержащем критическую точку $\frac{d\sqrt{3}}{3}$.

$$P\left(\frac{d}{3}\right) = \frac{d}{3}k\left(d^2 - \frac{d^2}{9}\right) = \frac{8}{27}kd^3.$$
$$P\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right) = k \cdot \frac{d}{\sqrt{3}}\left(d^2 - \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2\right) = \frac{kd}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2d^2}{3} = \frac{2\sqrt{3}kd^3}{9} = \frac{6\sqrt{3}}{27}kd^3.$$
$$P\left(\frac{2d}{3}\right) = k\frac{2d}{3}\left(d^2 - \frac{4d^2}{9}\right) = \frac{10}{27}kd^3.$$

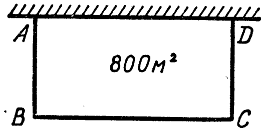


Рис. 106

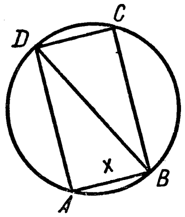


Рис. 107

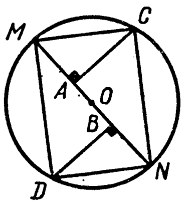


Рис. 108

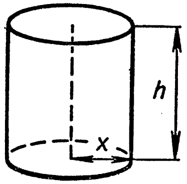


Рис. 109

Таким образом, $P_{\text{наиб}} = P\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3} \cdot kd^3}{9}$.

$$|AB| = \frac{d}{\sqrt{3}};\ |BC| = \sqrt{d^2 - x^2} = \sqrt{d^2 - \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2} = d\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ответ: $\frac{d\sqrt{3}}{3}$; $\frac{d\sqrt{6}}{3}$.

Примечание. На практике плотники пользуются следующим простым приемом выпиливания балки наибольшей прочности из бревна цилиндрической формы. Диаметр сечения MN делят на три отрезка равной длины (рис. 108). Из точек деления A и B проводят перпендикуляры AC и BD к диаметру. Точки C, N, D, M последовательно соединяют отрезками. В сечении получается прямоугольник $MCND$. Докажите, что такой прием выпиливания балки из бревна обеспечивает ее наибольшую прочность.

Задача 3*. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак объемом V (рис. 109). Какими должны быть размеры бака, чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество материала?

Решение. 1. Пусть x (в м) — радиус основания цилиндра, тогда его объем найдем по формуле: $V = \pi x^2 \cdot h$, откуда $h = \frac{V}{\pi x^2}$.

2. Выразим площадь полной поверхности цилиндра как функцию радиуса x: $S = 2\pi Rh + 2\pi R^2$ или $S(x) = \frac{2V}{x} + 2\pi x^2$ $(x \neq 0)$.

3. Исследуем функцию $S(x)$ на экстремум:
$S'(x) = \frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2}$, $S'(x) = 0$, $4\pi x^3 - 2V = 0$, $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ — критическая точка. Функция $S(x)$ определена на промежутке $]0;\ \infty[$. Составим таблицу:

x	$\left]0;\ \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right[$	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$\left]\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}};\ \infty\right[$
$S'(x)$	$-$	0	$+$
$S(x)$	↘	$\sqrt[3]{2\pi V^2}$	↗
		min	

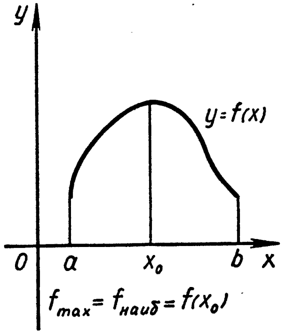


Рис. 110

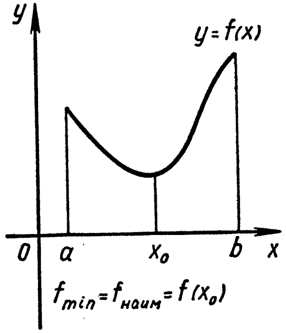


Рис. 111

Функция $S(x)$ имеет единственный экстремум при $x=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Найденный минимум является наименьшим значением функции. Искомый цилиндр имеет такие размеры: $R=x=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, $h=\frac{V}{\pi x^2}=$ $=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

Из полученных значений R и h видно, что на изготовление цилиндра заданного объема пойдет наименьшее количество материала, если высота цилиндра равна его диаметру.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; b]$ и $x_0 \in [a; b]$ ее критическая точка. Тогда $f(x_0)$ наибольшее (наименьшее) ее значение на $[a; b]$, если она на промежутке $[a; x_0]$ возрастает (убывает), а на промежутке $[x_0; b]$ убывает (возрастает) (рис. 110, 111).

Упражнения

1. Функция $\varphi(x)=-2x+3$ задана на отрезке $[-3; 10]$. Вычислите ее наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^3-3x^2+4$ на промежутке $[1; 3]$.

3. Вставьте соответствующие слова в текст: «Если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет на нем единственную критическую точку, то в случае максимума это будет ... значение функции, в случае минимума ... на этом отрезке». Проиллюстрируйте полученные утверждения на рисунках.

4. Расскажите план отыскания наибольшего и наименьшего значения функции, заданной на промежутке $[a; b]$.

5. Разложите число 40 на два таких слагаемых, чтобы их произведение было наибольшим.

6. В круг радиуса R впишите прямоугольник. При каком соотношении длин сторон прямоугольника его площадь будет наибольшей?

7. Сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна 20 см. Установите вид прямоугольного треугольника с указанной суммой длин катетов и наибольшей площадью.

8. Из прямоугольного листа жести размером 8×3 дм по его углам вырезаны квадраты и из оставшегося куска жести изготовлена открытая коробка (рис. 112). Найдите длину стороны вырезанного квадрата, если необходимо изготовить коробку наибольшего объема.

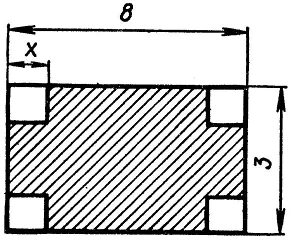


Рис. 112

9*. В прямоугольной системе координат через точку (1; 2) проведена прямая с отрицательным угловым коэффициентом, которая с осями координат образует треугольник. Каковы должны быть отрезки, отсекаемые прямой на осях координат, чтобы площадь треугольника была наименьшей?

10*. Каковы должны быть размеры консервной банки цилиндрической формы, имеющей наибольший объем при заданной площади поверхности S?

§ 36. ПОВТОРЕНИЕ

1. Найдите главную часть приращения функции: а) $\varphi(x)=$ $=-x^2+7x$; б)* $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}$; в)* $h(x)=\frac{1}{x^3}+1$.

2. Применяя формулу $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$, найдите приближенные значения: а) $(3,1)^5$; б) $(2,03)^7$; в) $\sqrt[3]{7,98}$; г)* $\sqrt[4]{31}$.

3. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой $y=\sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x=\frac{3}{4}$.

4. Найдите, под каким углом парабола $y=-x^2+x$ пересекает ось абсцисс в начале координат.

5. В какой точке графика функции $y=x^3$ касательная к нему образует с положительным направлением оси Ox угол, равный $\frac{\pi}{6}$?

6. Докажите, что касательные, проведенные к графику функции $y=\frac{x-4}{x-2}$ в точках пересечения его с осями координат, параллельны между собой.

7. Докажите, что касательная, проведенная в любой точке кривой $f(x)=x^3+2$, наклонена к положительному направлению оси Ox под острым углом.

8. Напишите уравнение касательной к параболе $y=3x^2+$ $+4x-2$ в точке графика с абсциссой $x=-3$.

9*. Прямая $y=-x-2$ является касательной к кривой, заданной уравнением $y=x^3-4x$. Найдите координаты точек касания.

10. На кривой $y=x^3+x^2-7x+2$ найдите точки, касательные в которых параллельны прямой $y=-2x+1$.

11. Тело движется прямолинейно по закону $S(t)=0{,}5t^4-5t^3+12t^2-1$, где путь — S в метрах, время — t в секундах. В какие моменты времени ускорение движения тела равно нулю?

12. Угол α (в радианах), на который повернется колесо через t (в с), равен $\alpha(t)=4t^2-32t+21$. Найдите угловую скорость колеса в момент времени $t=3$ с и определите, через сколько секунд оно остановится.

13*. Тело, брошенное вертикально вверх, движется по закону $h(t)=2+6t-4t^2$. Найдите наибольшую высоту подъема тела.

14. Найдите интервалы возрастания и убывания функций:

а) $f(x)=x^3-4x$; б) $\varphi(x)=x+\frac{1}{x}$;
в) $\psi(x)=-x^2+5x-7$; г) $h(x)=x(1+2\sqrt{x})$;
д)* $s(x)=\sqrt{(x^2-9)^3}$; е)* $y=x-|x|$.

15. Исследуйте на возрастание и убывание и экстремум функции:

а) $f(x)=x^2+2$; б) $\varphi(x)=3x^2+5x+1$;
в) $h(x)=-x^2+6x-9$; г) $s(x)=2x^3-3x^2$;
д)* $g(x)=x\cdot\sqrt{1-x^2}$; е)* $v(x)=x^2+\sqrt{x^5}$.

16. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ на заданном промежутке, если:

а) $f(x)=x^4-2x^2+5$, $x\in[-2;\ 2]$;
б) $f(x)=x+2\sqrt{x}$, $x\in[0;\ 4]$;
в)* $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{3}{x}$, $x\in[-6;\ -1]$;
г)* $f(x)=3\sqrt[3]{(x-1)^2}+x$, $x\in[1;\ 2]$.

17. Число 24 разбейте на такие два слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

18. Найдите такое положительное число, которое, будучи сложено с обратным ему числом, даст наименьшую сумму.

19. Докажите, что из всех прямоугольных треугольников, вписанных в круг радиуса R, наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

20. Требуется изготовить коробку с квадратным основанием наибольшего объема без крышки. Площадь поверхности коробки должна быть равной 12 см^2. Найдите размеры коробки.

21. Найдите отношение высоты конуса к его диаметру, если при заданном объеме V конус имеет наименьшую площадь боковой поверхности.

22. В треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник наибольшей площади. Вычислите эту площадь.

23*. Найдите высоту трапеции наибольшей площади, вписанной в полукруг радиуса r и имеющей нижним основанием диаметр полукруга.

24. Исследуйте квадратичную функцию и постройте ее график:

а) $y=4x^2-4x+1$; б) $y=2x^2+x-3$; в) $y=8-2x-x^2$;
г) $y=x^2+5x+8$; д) $y=10x-x^2-25$; е) $y=3x-x^2-6$.

25. Решите неравенства:

а) $2x^2-7x-30>0$; б) $x^2+2x-15<0$;
в) $2x^2-9x-35>0$; г) $x^2-x+6\leqslant 0$.

26. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $y=4x-x^2$; б) $y=\frac{x^3}{3}-x^2-3x$; в) $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$;
г) $y=x^2(1-x)$; д) $y=\frac{x^2}{x-2}$; е)* $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$;
ж)* $y=\sqrt[3]{x^2}-1$.

§ 37. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=x^2-3x$ в точке его с абсциссой $x=-1$.

2. Материальная точка движется по закону $s(t)=\frac{t+1}{2t+1}$. Найдите ее скорость в момент $t=2$.

3. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y=x^3-3x^2-9x$.

4. Исследуйте функцию $y=0{,}5x^2-2x-6$ и постройте ее график.

5. Исследуйте функцию $y=2x^3-3x^2+5$ и постройте ее график.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^3-3x^2-9x$ на промежутке $[-2;\ 1]$.

7. В равнобедренный треугольник с основанием 60 см и боковой стороной 50 см вписан прямоугольник наибольшей площади так, что две его вершины принадлежат основанию, а две другие — боковым сторонам треугольника. Найдите длины сторон прямоугольника.

Глава V.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ТОЖДЕСТВА

§ 38. ГРАДУСНОЕ ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВЫХ ВЕЛИЧИН

В восьмилетней школе мы измеряли угловые величины (углы, дуги, повороты) в градусной системе единиц. В этой системе единицами измерения угловых величин были градус, минута, секунда. Между этими единицами существует связь: $1° = 60'$, $1' = 60''$. В градусной системе единиц измеряются и углы поворота плоскости. Напомним, что поворотом плоскости вокруг точки O на угол α называют такое геометрическое преобразование, при котором: а) точка O отображается на себя; б) каждый луч OX отображается на луч OX_1, такой, что $X\widehat{O}X_1 = \alpha$ и $|OX| = |OX_1|$. Запись $X_1 = R_O^{\alpha}(X)$ читают так: «точка X_1 есть образ точки X при повороте плоскости вокруг точки O на угол α» (рис. 113). Принято считать величину угла поворота против движения часовой стрелки положительной, а по движению часовой стрелки отрицательной (рис. 114). Отображение одного луча на другой может быть осуществлено вращениями плоскости с одним и тем же центром и различными величинами углов вращения: $B = R_O^{30°}(A) = R_O^{-330°}(A)$ (рис. 115). Вращение на 360° есть тождественное отображение плоскости на себя: $R^{360°} = R^{\circ} = E$. Вращения плоскости относительно одного и того же центра на углы α, $\alpha + 360°$, $\alpha - 360°$, $\alpha + 2 \cdot 360°$, $\alpha - 2 \cdot 360°$, ..., $\alpha + 360° \cdot n$, где n — целое, совпадают, т. е. $R_O^{\alpha + 360° n} = R_O^{\alpha}$ для всех $n \in \mathbf{Z}$. С помощью этой формулы можно любые вращения сводить к поворотам с углами из промежутка $[-180°; 180°]$. Например, $R_O^{380°} = R_O^{360° + 20°} = R_O^{20°}$. И вообще, если вращение R_O^{φ} необходимо свести к повороту R_O^{α}, где $\alpha \in [-180°; 180°]$, то поступают следующим образом: число φ делят на 360, пусть n — частное, α — остаток такого деления ($\alpha \in [-180°; 180°]$); тогда $R_O^{\varphi} = R_O^{\alpha + 360° n} = R_O^{\alpha}$.

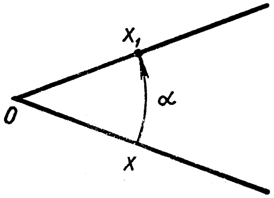


Рис. 113

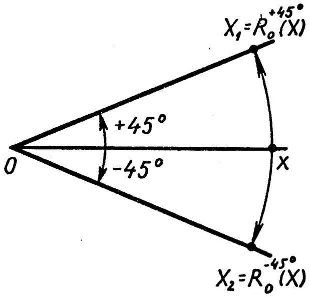


Рис. 114

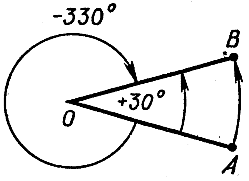


Рис. 115

Рассмотрим окружность радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 116). Такую окружность называют единичной. Единичная окружность есть график уравнения $x^2 + y^2 = 1$. Пусть P_0 есть точка с координатами (1; 0). Найдем образы этой точки при различных вращениях плоскости с общим центром — началом координат:

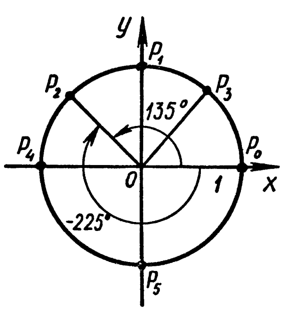


Рис. 116

$$R_O^{90°}(P_0) = P_1,\ R_O^{135°}(P_0) = P_2,\ R_O^{-225°}(P_0) = P_2,$$

$$R_O^{-315°}(P_0) = P_3,\quad R_O^{180°}(P_0) = P_4,\quad R_O^{-90°}(P_0) = P_5,\quad R_O^{270°}(P_0) = P_5.$$

Итак, каждому углу вращения соответствует единственная точка окружности — образ данной точки P_0. При этом каждая точка единичной окружности соответствует не одному, а бесконечному множеству углов вращения. Например, точка P_1 есть образ точки P_0 при вращении $R_O^{90° + 360° n}$, поэтому точке P_1 единичной окружности соответствует бесконечное множество углов: $90° + 360° \cdot n$, где $n \in \mathbf{Z}$.

Упражнения

1. Вычислите величины углов, образуемые часовой и минутной стрелками, если часы показывают: а) 4 ч; б) 6 ч; в) 13 ч 30 мин.

2. Найдите величины центральных углов для шага зубчатого колеса, имеющего: а) 48 зубьев; б) 36 зубьев.

3. Вычислите величину угла поворота зубчатого колеса, имеющего 72 зуба, если каждый последующий зуб занял положение предыдущего.

4. Сцеплены два зубчатых колеса, одно из которых имеет 10, другое 80 зубьев. На сколько градусов повернется второе колесо, если первое сделает полный оборот?

5. Найдите повороты, отображающие данный отрезок на себя.

6. $A_1 = R_O^{100°}(A)$. Запишите множество всех вращений с центром O, отображающих точку A на точку A_1.

7. Следующие вращения сведите к поворотам плоскости R_O^{α}, где $-180° < \alpha < 180°$: $R_O^{-740°}$; $R_O^{450°}$; $R_O^{1080°}$.

8. Дана единичная окружность. Постройте образы точки $P(-1; 0)$ при повороте R_O^{α}, где O — начало системы координат, а α принимает значения: а) 180°; б) 220°; в) −180°; г) −220°.

§ 39. РАДИАННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВЫХ ВЕЛИЧИН

Во многих разделах математики и физики, а также на практике удобной системой измерения угловых величин является радианная система. Напомним, что 1 радиан равен $\frac{180^\circ}{\pi}$, что приближенно равно 57°17′45″, 1° равен $\frac{\pi}{180}$ рад, что приближенно равно 0,017 рад.

Известно, что длина окружности радиуса R равна $2\pi R$. Вся окружность содержит 360° или 2π радиан. Вычислим длину l дуги этой окружности в один градус и длину m дуги этой окружности в 1 радиан: $l=\frac{2\pi R}{360}=\frac{\pi R}{180}$; $m=\frac{2\pi R}{2\pi}=R$. Получили, что длина дуги в 1 радиан равна радиусу окружности. Поэтому для нахождения радианной величины дуги (или центрального угла, ей соответствующего) необходимо длину этой дуги разделить на ее радиус:

$$\alpha=\frac{l}{R},$$

где R — радиус дуги, l — ее длина, α — радианная величина этой дуги.

Формулы для перевода градусной величины α° в радианную A и обратно можно получить из соотношения:

$$180^\circ=\pi_{\text{рад}},$$
$$\alpha^\circ=A_{\text{рад}}.$$

$$A=\frac{\pi}{180^\circ}\cdot\alpha^\circ; \qquad (1)$$

$$\alpha^\circ=\frac{180^\circ}{\pi}\cdot A. \qquad (2)$$

При выполнении вычислений часто обозначение «рад» опускают. При измерении углов поворотов в радианах следует иметь в виду, что вращение плоскости на 2π радиан, т. е. на 360°, есть тождественное отображение плоскости $R^{2\pi}=R^{360^\circ}=E$ и при любом целом n выполняется равенство

$$R^{\alpha+2\pi n}=R^{\alpha}.$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Выразите величины углов 30°, 45°, 90°, 270° в радианах.

Решение. Применяя формулу (1), получим:

$$30^\circ=\frac{\pi}{6};\quad 90^\circ=\frac{\pi}{2};$$

$$45^\circ=\frac{\pi}{4};\quad 270^\circ=\frac{3\pi}{2}.$$

Пример 2. Выразите величины углов $\frac{\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$ в градусах.

Решение. Применяя формулу (2), получим:

$$\frac{\pi}{3}=60^\circ;\quad -\frac{\pi}{2}=-90^\circ;$$

$$\frac{3\pi}{4}=135^\circ;\quad -\frac{3\pi}{2}=-270^\circ.$$

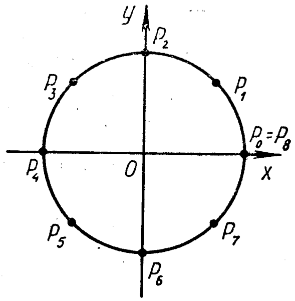
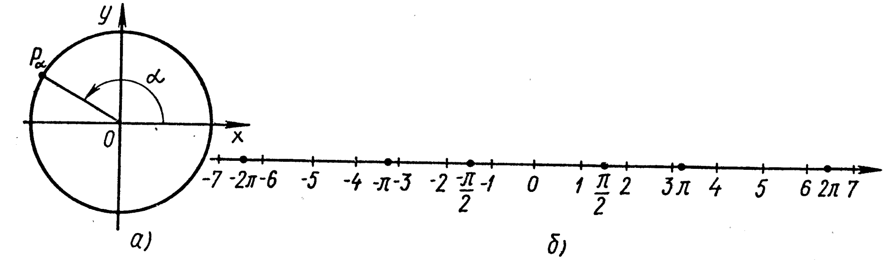


Рис. 117

Пример 3. Дана точка $P_0(1;\ 0)$. На единичной окружности постройте образы точки P_0 при поворотах плоскости вокруг начала координат на углы величиной $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{4}$; π; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{4}$; 2π.

Решение изображено на рисунке 117. Символами P_1; P_2; P_3; P_4; P_5; P_6; P_7; P_8 обозначены соответствующие образы точки P_0 при данных поворотах плоскости.

Каждому значению угловой величины в радианах соответствует одна и только одна точка единичной окружности (рис. 117) — образ точки $P_0(1;\ 0)$ при повороте плоскости на угол заданной величины. Значению 0 соответствует точка P_0; значению $\frac{\pi}{4}$ — точка P_1; значению $\frac{\pi}{2}$ — точка P_2 и т. д., значению 2π — снова точка P_0; значению $2\pi+\frac{\pi}{4}$ — снова точка P_1 и т. д. При этом каждая точка окружности соответствует не одному, а бесконечно многим значениям угловых величин. Так, точка P_0 соответствует значениям 0; 2π; 4π; 6π; ...; -2π; -4π; -6π; ..., т. е. числам вида $2\pi n$, где $n\in\boldsymbol{Z}$. Точка P_4 соответствует числам π; 3π; 5π; ...; $-\pi$; -3π; -5π; ..., т. е. числам вида $\pi+2\pi n=\pi(1+2n)$, где $n\in\boldsymbol{Z}$. Нетрудно заметить, что если числу α соответствует единственная точка P_α (рис. 118, *а*), то точке P_α будет соответствовать бесконечное множество чисел вида $\alpha+2\pi n$, где $n\in\boldsymbol{Z}$.



а)

б)

Рис. 118

Иначе обстоит дело с соответствием между множеством значений угловых величин и множеством точек координатной прямой. Это соответствие взаимно однозначно: каждому значению угловой величины соответствует единственная точка координатной прямой и обратно: каждой точке координатной прямой соответствует единственное значение угловой величины. На рисунке 118, *б* изображено описанное соответствие.

Для облегчения работы, связанной с переводом градусной величины углов в радианную, составлены специальные таблицы (см. табл. XI, «Четырехзначные математические таблицы» В. М. Брадиса).

Пример 4. Найдите радианную величину угла 37°24′.

Решение. В левой колонке таблицы XI находим число градусов: 37°, в верхней (или нижней) строке таблицы находим число минут: 24′. На пересечении строки с числом 37° и колонки с числом 24′ находим десятичные знаки приближенного ответа 6528. Целая часть ответа записана только в первой колонке. Поэтому $37°24' \approx 0{,}6528$ рад.

Пример 5. Найдите радианную величину угла 60°20′.

Решение. В левой колонке таблицы XI находим число градусов: 60°. В верхней (или нижней) строке таблицы нет 20′, поэтому находим ближайшее к нему число, им будет 18′. На пересечении соответствующей строки и колонки находим:

$$60°18' \approx 1{,}0524 \text{ рад.}$$

В правой части таблицы есть три колонки поправок (десятитысячные значения радиана для углов 1′, 2′, 3′). На пересечении строки, содержащей число 60°, и колонки поправок, содержащей 2′, находим: $2' \approx 0{,}0006$.

Теперь можно найти нужный ответ: $60°20' \approx 1{,}0530$. Решение оформляют в виде:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 60°18' - 1{,}0524 \\ 2' - \phantom{1{,}052}6 \end{array} \\ \hline 60°20' \approx 1{,}0530 \text{ рад.} \end{array}$$

В таблице XI приведены значения в радианах углов от 0° до 90°. Однако с помощью этой таблицы можно находить радианную величину любого угла, разбивая его градусную величину на части, не превосходящие 90°.

Пример 6. Найдите радианную величину угла 136°43′.

Решение. $136°43' = 90° + 46°43'$.

По таблице XI находим:

$$\begin{array}{r} 90° \quad - 1{,}5708 \\ 46°42' - 0{,}8151 \\ 1' - \phantom{0{,}815}3 \\ \hline 136°43' \approx 2{,}3862 \text{ рад.} \end{array}$$

Таблица XI позволяет также решать обратную задачу — находить градусную величину угла, величина которого дана в радианах.

Пример 7. Найдите градусную величину угла 0,9658 рад.

Решение. Находим в таблице число 0,9652, близкое к 0,9658. Найденное число есть радианная величина угла 55°18′. В строке, содержащей 55°, в колонке поправок 0,0006 рад соответствует 2′. Поэтому $0{,}9658 \text{ рад} = 55°20'$.

Решение оформляется в виде:

$$\begin{array}{r} 0{,}9652 \quad - 55°18' \\ 6 \quad - \quad 2' \\ \hline 0{,}9658 \text{ рад} \approx 55°20'. \end{array}$$

Упражнения

1. Применяя формулы перевода градусной величины в радианную и обратно, заполните таблицы:

а)

Градусная величина дуги	10°	20°	35°			
Радианная величина дуги				$-\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$

б)

Градусная величина дуги	32°5′			−63°45′		93°
Радианная величина дуги		1,2	1,51		−0,8	

2. Величины углов, прилежащих к боковым сторонам трапеции, относятся как 2 : 7. Найдите градусную и радианную величины этих углов.

3. Величины углов прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию. Определите градусные и радианные величины этих углов.

4. Постройте образ точки $P(-1; 0)$ при повороте $R_O^{\frac{\pi}{2}}$ плоскости, где O — начало системы координат. Найдите координаты построенной точки.

5. Постройте образ точки $P(0; -1)$ при вращении $R_O^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}$, $k \in \mathbf{Z}$, где O — начало системы координат. Найдите координаты построенной точки.

6. Постройте образы точки $P_0(1; 0)$ при вращении вокруг начала координат на углы $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{4}$; $-\pi$; $-\frac{5\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{7\pi}{4}$; -2π.

7. Поворот вокруг центра O единичной окружности отображает точку $P_0(1;\ 0)$ на точку $P_1(0;\ -1)$. Найдите множество углов вращения, сводящихся к данному повороту.

8. Колесо машины за 2 с делает 6 оборотов. Выразите в градусах и радианах величину угла, на который повернется колесо за 1 с, за 10 с.

9. Пользуясь таблицей XI из таблиц В. М. Брадиса, найдите радианную и градусную величины дуги:

Градусная величина дуги	28°56′	36°40′	172°15′			
Радианная величина дуги				0,6981	−0,8727	1,4643

10. Окружность морского компаса делится на 32 равные дуги, называемые румбами. Найдите величину одного румба в градусах и радианах.

11. В артиллерии применяется специальная система измерения угловых величин. В этой системе единица измерения называется делением угломера. Величина развернутого угла содержит 3000 делений угломера. Выразите в градусах и радианах величину угла, содержащую 100 делений угломера.

§ 40*. ДЛИНА ДУГИ ОКРУЖНОСТИ

Рассмотрим окружность с центром в точке O радиуса R (рис. 119). Выведем формулу для вычисления длины l дуги AB этой окружности, если известна радианная величина α этой дуги. Известно, что длина всей окружности равна $2\pi R$. Длина дуги этой окружности в 1 рад равна $\frac{2\pi R}{2\pi}=R$. Длина дуги AB, содержащей α радиан, равна $R\alpha$. Итак, получили формулу длины дуги окружности

$$l=R\alpha,$$

где l — длина дуги, R — радиус дуги, α — величина дуги в радианах.

Пример 1. Найдите длину дуги окружности радиуса 24 см, если дуга содержит $\frac{\pi}{8}$ рад.

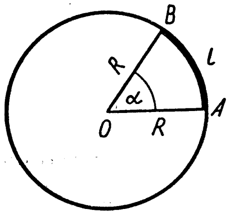


Рис. 119

Решение.

$$l=24\cdot\frac{\pi}{8}=3\pi\ (\text{см}).$$

Пример 2. Найдите длину дуги окружности радиуса 20 см, градусная величина которой равна 45°.

Решение. Найдем радианную величину дуги 45°: $A=\frac{\pi}{180}\cdot 45=\frac{\pi}{4}$. Длина l дуги равна: $l=R\alpha=20\cdot\frac{\pi}{4}=5\pi$ (см)

Пример 3. Сколько градусов содержит дуга окружности, длина которой равна удвоенному радиусу этой окружности?

Решение. По условию $l=2R$, из формулы длины дуги окружности найдем: $\alpha=\frac{l}{R}$, откуда $\alpha=2$ рад $\approx 114{,}6°$.

Пример 4. Дуга окружности содержит 200° и имеет длину 50 см. Найдите радиус этой окружности.

Решение. Найдем радианную величину дуги 200°: $A=\frac{\pi}{180}\cdot 200=\frac{10\pi}{9}$ рад. Найдем радиус R окружности:

$$R=\frac{l}{\alpha}=\frac{50\cdot 9}{10\pi}=\frac{45}{\pi}\approx 14{,}3\ \text{см}.$$

Упражнения

1. Найдите длину дуги окружности радиуса 80 см, если дуга содержит $\frac{\pi}{10}$ радиан.

2. Найдите градусную величину дуги радиуса 18 см, содержащей $\frac{\pi}{6}$ радиан.

3. Найдите длину дуги, содержащей 120°, если ее стягивает хорда длиной 10 см.

4. Окружность радиуса 12 см разогнута в дугу радиуса 30 см. Найдите градусную величину этой дуги.

5. Найдите периметр сектора радиуса 20 см, радианная величина дуги которого равна $\frac{\pi}{3}$.

§ 41*. ПЛОЩАДЬ КРУГОВОГО СЕКТОРА

Рассмотрим окружность с центром в точке O радиуса R. Выведем формулу для вычисления площади S сектора OAB (рис. 119).

Известно, что площадь круга равна πR^2. Площадь сектора, дуга которого содержит 1 рад, равна $\frac{\pi R^2}{2\pi}=\frac{R^2}{2}$. Площадь S сектора OAB, дуга которого содержит α радиан, равна $\frac{R^2}{2}\cdot\alpha$ (кв. ед.).

Итак, получили формулу площади кругового сектора:

$$S=\frac{R^2}{2}\cdot\alpha,$$

где S — площадь, R — радиус дуги, α — величина дуги сектора.

Пример 1. Величина дуги сектора в радианах равна $\frac{2\pi}{3}$, а его радиус равен 9 см. Найдите площадь сектора.

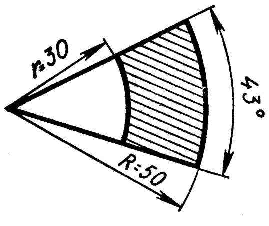


Рис. 120

Решение. $S=\frac{R^2\cdot\alpha}{2}$; $S=\frac{9^2\cdot\frac{2\pi}{3}}{2}=$ $=27\pi$ (см^2).

Пример 2. Радианная величина дуги кругового сектора равна 3, его площадь 584 см^2. Найдите радиус сектора.

Решение. По формуле площади кругового сектора $S=\frac{R^2\alpha}{2}$ найдем: $R^2=\frac{2S}{\alpha}$; $R^2=\frac{2\cdot 584}{3}=256$; $R=\sqrt{256}=16$ (см).

Упражнения

1. Найдите площадь кругового сектора, радиус которого равен 18 см, а величина дуги в радианах $\frac{\pi}{3}$.

2. Радиус кругового сектора равен 12 см, дуга его содержит 50°. Вычислите площадь сектора.

3. Длина дуги кругового сектора равна 120 см. Найдите площадь сектора, если величина его дуги в радианах равна $\frac{2\pi}{5}$.

4. Вычислите площадь плоской детали, изображенной на рисунке 120 (размеры проставлены в мм).

5. Площадь кругового сектора равна 300 см^2, а величина его дуги в радианах равна 1,5. Найдите радиус сектора.

6. Площадь сектора равна 400 см^2, а его радиус 15 см. Найдите величину дуги сектора в радианах и градусах.

§ 42. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

В восьмилетней школе вы изучали тригонометрические функции углов. Так, вы знакомы с функциями $y=\sin\alpha$, $y=\cos\alpha$, $y=\operatorname{tg}\alpha$, где α — некоторый угол. Введение радианной системы измерения угловых величин и установление взаимно однозначного соответствия между множеством значений угловых величин и множеством действительных чисел позволяет расширить представление о тригонометрических функциях. Введем теперь тригонометрические функции числового аргумента.

Рассмотрим координатную плоскость и единичную окружность $x^2+y^2=1$ (рис. 121). Точка P_0 имеет координаты (1; 0).

Рассмотрим вращение плоскости вокруг начала координат на α радиан (здесь α — любое действительное число). Пусть в этом вращении образом точки P_0 будет точка P_α с координатами (x; y). Точку P_α будем называть соответствующей числу α.

Определение. **Синусом числа α называется ордината точки единичной окружности, соответствующая числу α.**

Обозначение: $\sin\alpha=y$.

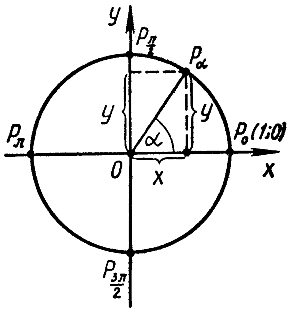


Рис. 121

Определение. **Косинусом числа α называется абсцисса точки единичной окружности, соответствующая числу α.**

Обозначение: $\cos\alpha=x$. Область определения функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ есть множество всех действительных чисел, так как любому действительному числу соответствует определенная точка единичной окружности.

Определение. **Тангенсом числа α называется отношение синуса этого числа к косинусу этого числа.**

Обозначение: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cos\alpha\neq 0$.

Функция тангенс определена только для тех значений аргумента α, которые не обращают в нуль $\cos\alpha$.

Определение. **Котангенсом числа α называется отношение косинуса этого числа к синусу этого числа.**

Обозначение: $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\sin\alpha\neq 0$.

Функция котангенс определена только для тех значений аргумента α, которые не обращают в нуль $\sin\alpha$.

Определение. **Секансом числа α называется обратное значение косинуса этого числа.**

Обозначение: $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$, $\cos\alpha\neq 0$.

Функция секанс определена только для тех значений аргумента α, которые не обращают в нуль $\cos\alpha$.

Определение. **Косекансом числа α называется обратное значение синуса этого числа.**

Обозначение: $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$, $\sin\alpha\neq 0$.

Функция косеканс определена только для тех значений аргумента α, которые не обращают в нуль $\sin\alpha$.

Функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$ называют тригонометрическими функциями числового аргумента.

Пример 1. Заполните таблицу:

Функция	Аргумент				
	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$					
$\cos\alpha$					
$\operatorname{tg}\alpha$					
$\operatorname{ctg}\alpha$					

Решение. Рассмотрим единичную окружность (рис. 121) Если $\alpha = 0$, то $P_0(1;\ 0) \to P_0(1;\ 0)$. Поэтому $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\operatorname{tg} 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$, $\operatorname{ctg} 0$ не существует, так как $\sin 0 = 0$. Полученные результаты занесите в первую колонку таблицы.

Заполним еще одну колонку этой таблицы. Если $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, то $P_0(1;\ 0) \to P_{\frac{3\pi}{2}}(0;\ -1)$. Рассмотрим единичную окружность:

$\sin\frac{3\pi}{2} = -1$; $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$; $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2} = \dfrac{\sin\frac{3\pi}{2}}{\cos\frac{3\pi}{2}}$ — не существует, так как $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$; $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2} = \dfrac{\cos\frac{3\pi}{2}}{\sin\frac{3\pi}{2}} = \frac{0}{-1} = 0$. Остальные колонки заполните самостоятельно.

Укажем области определений и множества значений тригонометрических функций числового аргумента.

Так как ордината и абсцисса любой точки единичной окружности по модулю не превосходят единицы, то множеством значений функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ является отрезок $[-1;\ 1]$.

Область определения функции $\operatorname{tg}\alpha$ есть множество всех действительных чисел, при которых значение косинуса отлично от нуля. Функция косинус обращается в нуль при следующих значениях аргумента: $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$; ...; $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{2}$; ..., т. е. при всех значениях аргумента вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \ldots$, т. е. $n \in \boldsymbol{Z}$. Поэтому областью определения функции тангенс служит множество всех действительных чисел, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Область определения функции $\operatorname{ctg}\alpha$ есть множество всех действительных чисел, кроме тех, при которых значение синуса равно нулю. Функция синус обращается в нуль при следующих значениях аргумента: 0; π; 2π; 3π; ...; $-\pi$; -2π; -3π; ..., т. е. при всех значениях аргумента вида πn, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Поэтому областью определения функции котангенс служит множество всех действительных чисел, кроме чисел вида πn, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Множество значений функций $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ есть множество всех действительных чисел.

	Функция			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
Область определения	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$	$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots$	$\alpha \neq \pi n$, $n=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots$
Множество значений	$[-1;\ 1]$	$[-1;\ 1]$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$

Пример 2. Известно, что $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найдите значения функций $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

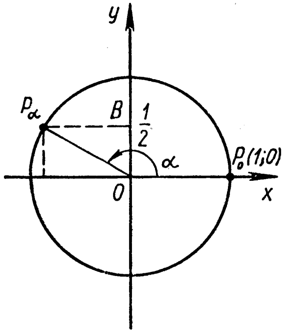


Рис. 122

Решение. Задачу легче решить, пользуясь единичной окружностью (рис. 122). Пусть $P_\alpha = R_O^\alpha(P_0)$. Рассмотрим прямоугольный треугольник OBP_α: $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ есть соответственно ордината и абсцисса точки P_α, $|OP_\alpha| = 1$, $|OB| = \frac{1}{2}$. Воспользовавшись теоремой Пифагора, найдем $|P_\alpha B| = |\cos\alpha|$:

$$|\cos\alpha| = |P_\alpha B| = \sqrt{|P_\alpha O|^2 - |OB|^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Так как $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\cos\alpha < 0$, поэтому $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}.$$

Упражнения

1. Сформулируйте определения тригонометрических функций числа. Запишите области определения и множества значений этих функций.

2. На миллиметровой бумаге постройте единичную окружность. На ней постройте точки P_α для таких значений аргумента α: а) $\frac{\pi}{4}$; б) $-\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{2\pi}{3}$; г) $-\frac{2\pi}{3}$. Найдите приближенные значения тригонометрических функций при данных значениях аргумента.

3. Сравните значения функций: а) $\sin\frac{\pi}{4}$ и $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; б) $\cos\frac{\pi}{6}$ и $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; в) $\sin\frac{\pi}{6}$ и $\cos\frac{3\pi}{4}$; г) $\cos\frac{3\pi}{4}$ и $\cos\frac{7\pi}{4}$; д) $\cos\frac{\pi}{8}$ и $\cos\frac{5\pi}{4}$.

4. Дано: $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Найдите значения функций $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$.

5. На единичной окружности постройте точки, соответствующие числам: 0; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{6}$; π; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{6}$; 2π. Найдите значения функций $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ при этих значениях аргумента. Заполните таблицу:

Функция	Аргумент															
	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\alpha$																
$\cos\alpha$																
$\operatorname{tg}\alpha$																
$\operatorname{ctg}\alpha$																

6. Вычислите:

а) $2\cos\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\pi + \sin\frac{\pi}{2}$;

б) $2\sin\alpha + \cos 2\alpha - 5\sin 3\alpha - 4\cos 6\alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

7. Верно ли равенство

$$\cos 30^\circ \operatorname{tg} 30^\circ - 1 = \operatorname{ctg} 60^\circ (1 + \sin^2 45^\circ)?$$

8. Найдите множество значений аргумента x, при которых разность $1 - \sin x$: а) положительна; б) равна нулю; в) отрицательна.

§ 43. ИЗМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ИЗМЕНЕНИЕМ АРГУМЕНТА

Рассмотрим прямоугольную систему координат и в ней единичную окружность (рис. 123). Оси координат делят множество точек плоскости, не принадлежащих осям, на четыре непересекающихся подмножества, называемых четвертями или квадрантами. Обычно четверти (квадранты) нумеруются, как показано на рисунке 123. Точкам единичной окружности, лежащим в первой четверти (I), соответствуют действительные числа α из промежутка $]0 + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n[$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Точкам единичной окружности, лежащим во второй четверти (II), соответствуют действительные числа α из промежутка $]\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n[$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

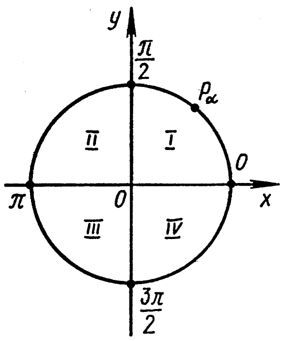


Рис. 123

Задание 1. Запишите числовые промежутки, соответствующие точкам единичной окружности, лежащим: а) в III четверти; б) в IV четверти.

Рассмотрим изменение значений тригонометрических функций с изменением значений аргумента по четвертям от 0 до 2π.

Проследим вначале, как изменяются значения функции $\sin\alpha$ с изменением α. Вспомним, что $\sin\alpha$ — это ордината точки единичной окружности, соответствующая числу α. Пусть α возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, $\sin\alpha$ будет возрастать от 0 до 1; если затем α возрастает от $\frac{\pi}{2}$ до π, то $\sin\alpha$ убывает от 1 до 0; при дальнейшем возрастании аргумента α от π до $\frac{3\pi}{2}$ значения $\sin\alpha$ продолжают убывать от 0 до -1, а затем с возрастанием α от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π значения $\sin\alpha$ возрастают от -1 до 0.

Построим схематический график функции $y = \sin x$ (рис. 124) для $x \in [0;\ 2\pi]$. Обратим внимание на знаки значений функции $\sin\alpha$ с изменением аргумента α по четвертям. Схематически знаки значений функции $\sin\alpha$ с изменением аргумента α по четвертям представлены на рисунке 125.

Задание 2. Проследите изменение функции $\cos\alpha$ с возрастанием аргумента α от 0 до 2π.

Схематически знаки значений косинуса с изменением аргумента α по четвертям представлены на рисунке 126.

Схематический график функции $y = \cos x$ изображен на рисунке 127.

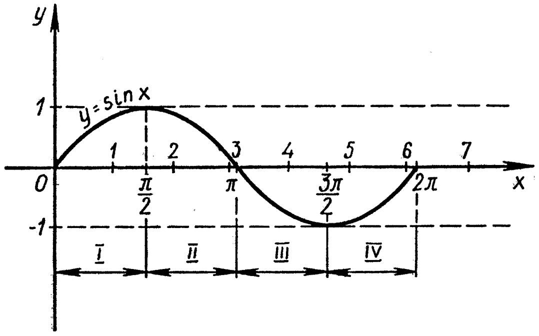


Рис. 124

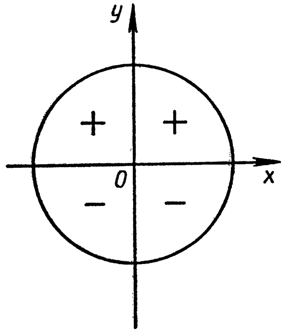


Рис. 125

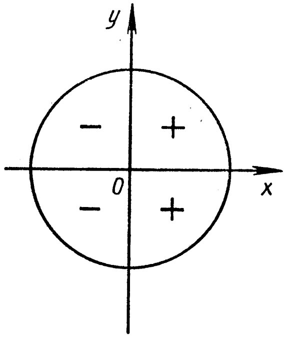


Рис. 126

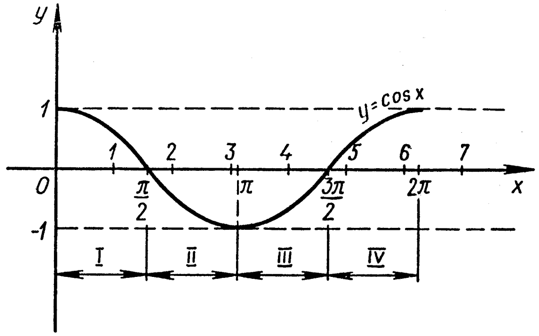


Рис. 127

Пользуясь определениями функции tgα и ctgα, можно проследить их изменение с изменением аргумента α.

Задание 3. Проследите изменение тангенса и котангенса с изменением аргумента α от 0 до 2π.

На рисунках 128—131 показано, как можно установить знаки значений тангенса и котангенса по четвертям.

На рисунках 132—133 схематически представлено изменение знаков значений тангенса и котангенса с изменением аргумента по четвертям.

Наши выводы можно свести в таблицу:

Четверть	Функция			
	sin α	cos α	tg α	ctg α
I	+	+	+	+
II	+	−	−	−
III	−	−	+	+
IV	−	+	−	−

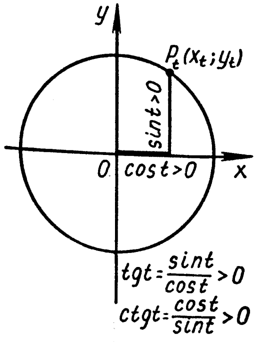

y
x
0
$P_t(x_t;y_t)$
sin t>0
cos t>0
$tg t = \frac{sin t}{cos t} > 0$
$ctg t = \frac{cos t}{sin t} > 0$

Рис. 128

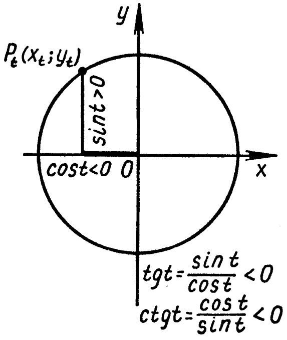

y
x
0
$P_t(x_t;y_t)$
sin t>0
cos t<0
$tg t = \frac{sin t}{cos t} < 0$
$ctg t = \frac{cos t}{sin t} < 0$

Рис. 129

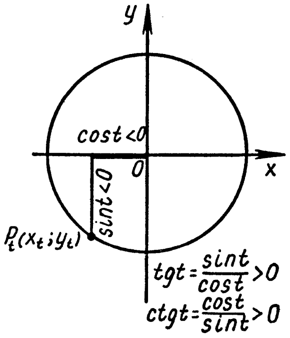

y
x
0
$P_t(x_t;y_t)$
cos t<0
sin t<0
$tg t = \frac{sin t}{cos t} > 0$
$ctg t = \frac{cos t}{sin t} > 0$

Рис. 130

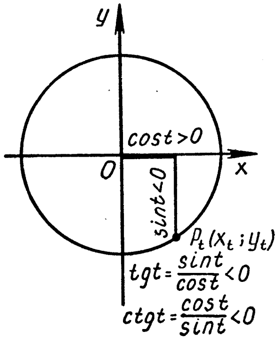

y
x
0
cos t>0
sin t<0
$P_t(x_t;y_t)$
$tg t = \frac{sin t}{cos t} < 0$
$ctg t = \frac{cos t}{sin t} < 0$

Рис. 131

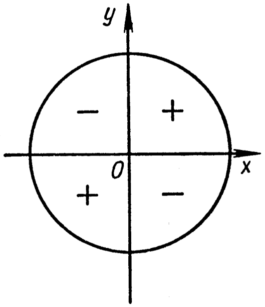


Рис. 132

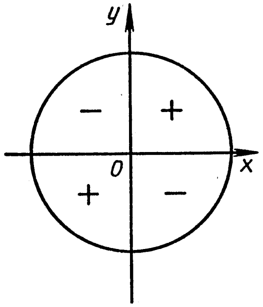


Рис. 133

Упражнения

1. Проследите изменение секанса и косеканса с возрастанием аргумента от 0 до 2π. Составьте таблицу знаков значений этих функций с изменением аргумента по четвертям.

2. Найдите знаки значений тригонометрических функций по заданным ниже в таблицах значениям аргумента:

а)

Аргумент	Функция			
	sin α	cos α	tg α	ctg α
285°				
—150°				
390°				
660°				

б)

Аргумент	Функция			
	sin α	cos α	tg α	ctg α
$-\frac{\pi}{8}$				
$\frac{15}{9}\pi$				
$\frac{11}{3}\pi$				
$\frac{5}{4}\pi$				

в)

Аргумент	Функция			
	sin α	cos α	tg α	ctg α
1,6				
—2,3				
—6				
3,1				

3. Найдите знаки значений выражений: а) $\sin 200° \cdot \cos 320°$; б) $\cos\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{ctg}\frac{10\pi}{3}$; в) $\frac{\operatorname{tg}5}{\cos(-3)\sin(-2)}$.

§ 44. ТАБЛИЦЫ ЗНАЧЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

Приближенные значения функций sin α и cos α можно найти при помощи единичной окружности. На рисунке 134 изображена единичная окружность в масштабе 1 ед = 5 см. На окружности обозначены точки, соответствующие числам от 0 до 2π через каждые 0,05 радиана. С помощью такой окружности можно находить значения sin α и cos α с точностью до 0,02 — 0,03.

Для нахождения значений тригонометрических функций с большей точностью составлены таблицы. В «Четырехзначных математических таблицах» В. М. Брадиса таблицы VIII, IX, X позволяют находить значения sin α, cos α, tg α, ctg α, если задано значение аргумента α в градусах от 0 до 90°; таблица XII позволяет находить значения этих функций при значениях аргумента в радианах от 0 до π.

Позднее будет показано, что этими же таблицами можно воспользоваться для нахождения значений тригонометрических функций при любых значениях аргумента.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найдите sin 50°18′.

Решение. Воспользуемся таблицей VIII. Число градусов (50°) находим в левой колонке, а число минут (18′) — в верхней строке. Значение синуса находим на пересечении строки, содержащей 50°, и колонки, содержащей 18′: sin 50°18′ ≈ 0,7694 (целая часть числа указана только в колонке 0°).

Пример 2. Найдите sin 65°20′.

Решение. В левой колонке находим число градусов (65°), в верхней строке нет числа 20′, поэтому берем ближайшее к нему число 18′. На пересечении строки, содержащей 65°, и колонки, содержащей 18′, находим: sin 65°18′ ≈ 0,9085. Необходимо теперь учесть поправку на 2′. Поправки (десятитысячные) на 1′, 2′ и 3′ содержатся в трех последних колонках. Так как на промежутке от 0 до 90° с возрастанием аргумента возрастает значение синуса, то найденную поправку прибавляем к значению sin 65°18′.

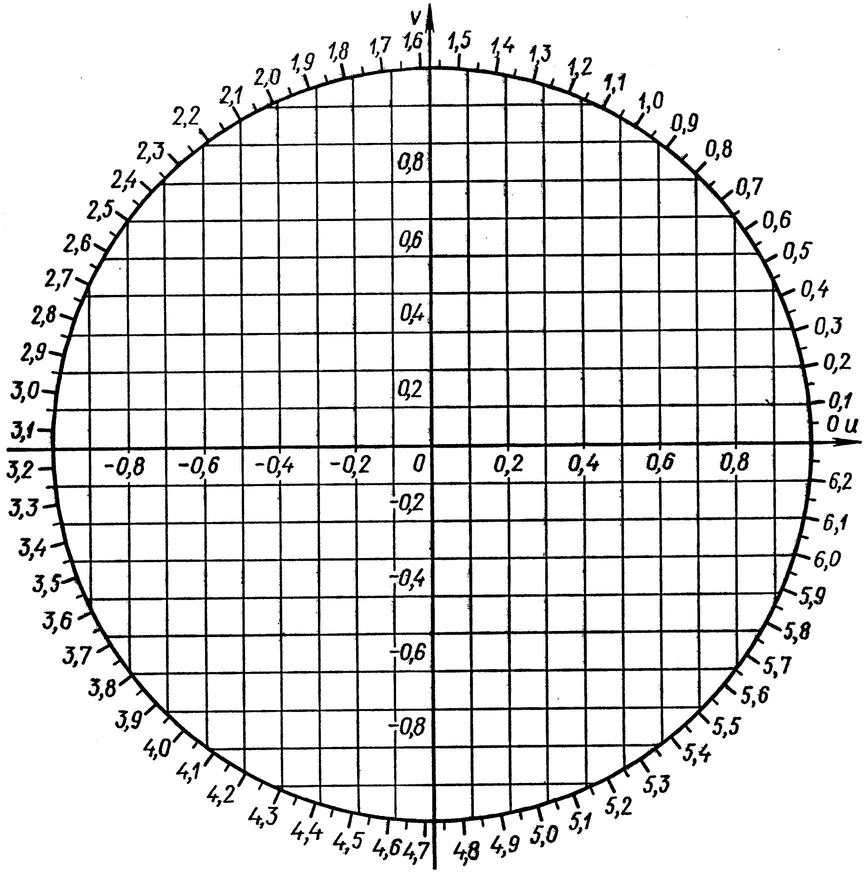


Рис. 134

Приведем запись решения:

$$\begin{array}{r} +\ \sin 65°18' — 0,9085\ + \\ 2' — \quad 2\ \ \\ \hline \sin 65°20' \approx 0,9087 \end{array}$$

Пример 3. Найдите cos 34°13′.

Решение. Для нахождения значений косинуса пользуются той же таблицей VIII, что и для нахождения значений синуса. Только число градусов берут из правой колонки (четвертая колонка справа, перед колонками поправок), а число минут — из нижней строки. В нижней строке нет числа 13′, поэтому находим ближайшее к нему число 12′. На пересечении строки, содержащей 34°, и колонки, содержащей 12′, читаем: $\cos 34°12' \approx 0{,}8271$. В этой же строке находим поправку на 1′, равную 2 десятитысячным. Вспоминаем, что с увеличением аргумента на промежутке от 0 до 90° значения косинуса убывают, поэтому найденную поправку надо вычесть от значения $\cos 34°12'$.

Приведем запись решения:

$$+\begin{array}{r} \cos 34°12' - 0{,}8271 \\ 1' - \quad 2 \end{array} - \\ \overline{\cos 34°13' \approx 0{,}8269}$$

Аналогично значения тангенса и котангенса при градусной величине аргумента находят по таблице IX.

По таблице X находят тангенсы углов, близких к 90°, и котангенсы малых углов.

По таблице XII находят значения тригонометрических функций числового аргумента.

Пример 4. Найдите $\cos 1{,}47$.

Решение. По таблице XII в колонке x (значения аргумента) находим 1,47. На пересечении строки, содержащей это значение аргумента, и колонки $\cos x$ читаем ответ: $\cos 1{,}47 \approx 0{,}1006$.

Пример 5. Найдите $\operatorname{tg} 1{,}7832$.

Решение. $\operatorname{tg} 1{,}7832 \approx \operatorname{tg} 1{,}78 \approx -4{,}7101$.

Упражнения

1. Найдите:

а) $\sin 56°30'$, б) $\cos 32°18'$, в) $\operatorname{tg} 17°12'$, г) $\operatorname{ctg} 16°30'$,
$\sin 59°40'$, $\cos 61°10'$, $\operatorname{tg} 48°49'$, $\operatorname{ctg} 47°35'$,
$\sin 78°5'$; $\cos 74°2'$; $\operatorname{tg} 64°53'$; $\operatorname{ctg} 78°23'$.

2. Найдите значения синуса, косинуса и тангенса следующих чисел: а) 1,48; б) 0,26; в) 2,381; г) 3,051.

§ 45. РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ НА ПРОМЕЖУТКЕ ОТ 0 ДО 2π

Простейшими тригонометрическими уравнениями обычно называют уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$ В этих уравнениях переменная находится под знаком тригонометрической функции, a — данное число. В этом параграфе мы научимся решать лишь первые два уравнения на промежутке $[0; 2\pi]$. Заметим, что $|\sin x| \leqslant 1$ и $|\cos x| \leqslant 1$, поэтому уравнения $\sin x = a$ и $\cos x = a$ имеют решения при $|a| \leqslant 1$. Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 1. Решите уравнение $\sin x = 0{,}5$.

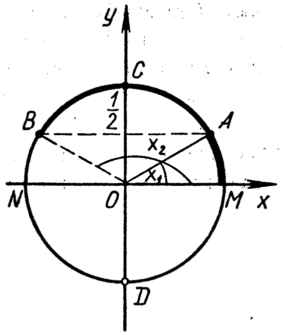


Рис. 135

Решение. Рассмотрим единичную окружность (рис. 135). Найдем на ней точки, ординаты которых равны 0,5. Таких точек две: A и B.

Радианные величины дуг MA и MB и будут решением данного уравнения на промежутке от 0 до 2π: $x_1 = \overset{\smile}{MA} = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \overset{\smile}{MB} = \pi - \overset{\smile}{BN}$, замечаем, что $\overset{\smile}{BN} = \overset{\smile}{MA}$, поэтому $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Пример 2. Пользуясь единичной окружностью, изображенной на рисунке 134, решите уравнение $\cos x = -0{,}4$ на промежутке $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Решение. На единичной окружности находим точки абсциссы которых равны —0,4. Таких точек две, этим точкам на промежутке от 0 до 2π соответствуют числа 2,0 и 4,3.

Ответ: $x_1 \approx 2{,}0$; $x_2 \approx 4{,}3$.

Пример 3. Решите уравнение $\cos x = 1$ для $x \in [0; 2\pi]$.

Решение. На единичной окружности имеется только одна точка с абсциссой 1. Это точка M (рис. 135), ей соответствуют числа 0 и 2π. Поэтому $x_1 = 0$; $x_2 = 2\pi$.

Пример 4. Решите уравнение $\cos x = 0$ для $x \in [0; 2\pi]$.

Решение. На единичной окружности имеются две точки с абсциссой 0. Это точки C и D (рис. 135). Этим точкам соответствуют числа $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$, поэтому рассматриваемое уравнение имеет два решения $x_1 = \frac{\pi}{2}$ и $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

Задание 1. С помощью единичной окружности решите на промежутке $[0; 2\pi]$ уравнения: в) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Простейшими тригонометрическими неравенствами обычно называют неравенства вида $\sin x \geqslant a$ ($\sin x \leqslant a$) или $\cos x \geqslant a$ ($\cos x \leqslant a$), $\operatorname{tg} x \geqslant a$, $\operatorname{ctg} x \geqslant a$. В этих неравенствах переменная находится под знаком тригонометрической функции, а a — данное число. В данном параграфе мы с помощью единичной окружности научимся решать такие неравенства только на промежутке $[0; 2\pi]$. Рассмотрим примеры.

Пример 5. Решите неравенство $\sin x \leqslant 0{,}5$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

Решение. Рассмотрим единичную окружность (рис. 136). Найдем на ней точки, ординаты которых равны или меньше 0,5. Ясно, что этому условию удовлетворяют точки дуги $AMDNB$. Множество точек этой дуги можно записать в виде объедине-

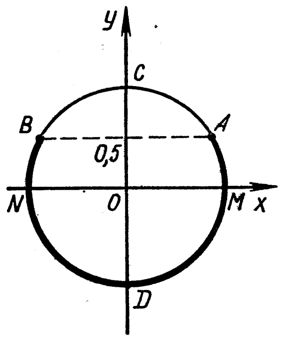


Рис. 136

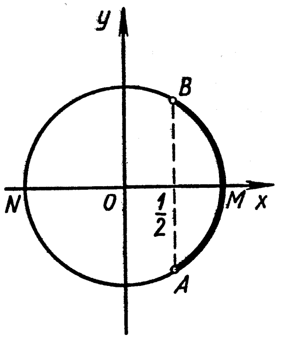


Рис. 137

ния двух числовых промежутков: $\left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$, где промежуток $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ соответствует дуге MA, а промежуток $\left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$ — дуге BNM.

Ответ: $\left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$.

Пример 6. Решите неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

Решение. Рассмотрим единичную окружность (рис. 137). Найдем на ней точки, абсциссы которых больше $\frac{1}{2}$. Ясно, что этому условию удовлетворяют внутренние точки дуги AMB. Точке B соответствует число $\frac{\pi}{3}$, точке A — число $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. Внутренние точки дуги AMB можно записать в виде объединения числовых промежутков: $\left[0; \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]$.

Ответ: $\left[0; \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]$.

Задание 2. С помощью единичной окружности на промежутке $[0; 2\pi]$ решите неравенства:

а) $\sin x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Упражнения

1. С помощью единичной окружности (рис. 134) решите следующие тригонометрические уравнения на промежутке $[0; 2\pi]$:

а) $\sin x \approx 1{,}5$; б) $\cos x \approx 0{,}45$; в) $\cos x \approx -0{,}65$;
г) $\sin x \approx 0{,}85$; д) $\sin x \approx -0{,}65$; е) $\cos x \approx -2$.

2. Следующие тригонометрические уравнения решите на промежутке $[0; 2\pi]$:

а) $\sin x = 1$; б) $\cos x = 0$; в) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
г) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\sin x = -0{,}5$; е) $\cos x = -0{,}5$;
ж) $\sin^2 x + 2\sin x + 1 = 0$; з) $\cos^2 x = \cos x$.

3. Решите неравенства на промежутке $[0; 2\pi]$:

а) $\sin x \geqslant 0{,}5$; б) $\cos x \leqslant 0{,}5$; в) $\sin x < -0{,}5$;
г) $\cos x > -0{,}5$; д) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$;
ж) $\sin x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$; з) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. С помощью единичной окружности (рис. 134) решите следующие тригонометрические неравенства на промежутке $[0; 2\pi]$:

а) $\sin x > 0{,}52$; б) $\sin x \leqslant 0{,}7$; в) $\sin x \leqslant -0{,}21$;
г) $\cos x \leqslant -0{,}25$; д) $\cos x > 0{,}7$; е) $\cos x \leqslant 0{,}44$.

§ 46. ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ АРГУМЕНТА

Некоторые зависимости между тригонометрическими функциями нам уже известны:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \text{ где } n \in \mathbf{Z} \qquad (1)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \text{ где } n \in \mathbf{Z}. \qquad (2)$$

Эти зависимости введены как определения. Установим еще несколько зависимостей.

Рассмотрим единичную окружность (рис. 138) и некоторую ее точку $P_\alpha(x; y)$, соответствующую числу α. Координаты любой точки $P(x; y)$ единичной окружности связаны соотношением $x^2 + y^2 = 1$. По определению $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$. Поэтому

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ где } \alpha \in \mathbf{R}. \qquad (3)$$

Тождество (3) показывает, что, зная значение одной из функций $\sin \alpha$ или $\cos \alpha$, можно найти соответствующее значение другой из них. Так, если известно значение $\cos \alpha$, то из равенства (3) находим:

$$|\sin \alpha| = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}.$$

Чтобы найти $\sin \alpha$, надо еще знать, какой четверти принадлежит точка единичной окружности, соответствующая числу α. Например, если известно, что $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, то по заданному значению

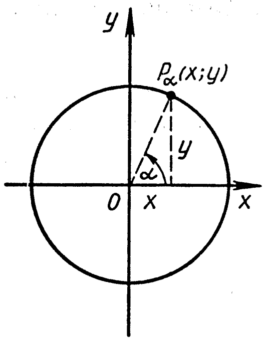


Рис. 138

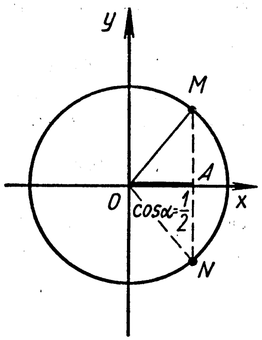


Рис. 139

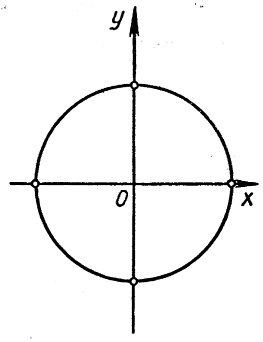


Рис. 140

можно найти два различных значения $\sin\alpha$ (рис. 139): $\sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ординаты точек M и N).

Если же нам, например, известно, что точка, соответствующая числу α, принадлежит IV четверти, т. е. $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, то значение синуса определяется однозначно: $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Аналогично обстоит дело с нахождением значения $\cos\alpha$ при заданном значении $\sin\alpha$:

$$|\cos\alpha| = \sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

Перемножив почленно равенства (1) и (2), получим:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1.$$

Это равенство справедливо только при тех значениях аргумента, при которых определены функции $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, т. е. при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ и $\alpha \neq \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$. На единичной окружности (рис. 140) кружочками выделены точки, соответствующие числам вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, для которых не определена функция $\operatorname{tg}\alpha$, а также точки, соответствующие числам вида πn, для которых не определена функция $\operatorname{ctg}\alpha$. Объединением этих множеств будет множество действительных чисел вида $\frac{\pi n}{2}$, где $n \in \mathbf{Z}$. Поэтому рассматриваемое равенство справедливо при всех действительных числах, кроме чисел вида $\frac{\pi n}{2}$, где $n \in \mathbf{Z}$.

Итак,

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \text{ где } n \in \mathbf{Z}. \qquad (4)$$

Равенство (4) позволяет находить значение $\operatorname{tg}\alpha$ по заданному значению $\operatorname{ctg}\alpha$ и обратно: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Тождество (3) разделим почленно на $\cos^2\alpha$, что возможно при всех значениях α, не обращающих $\cos\alpha$ в нуль, т. е. при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$. Получим:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \text{ где } n \in \mathbf{Z}. \qquad (5)$$

Тождество (3) разделим почленно на $\sin^2\alpha$, что возможно при всех значениях α, не обращающих $\sin\alpha$ в нуль, т. е. при $\alpha \neq \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$. Получим:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha},$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \text{ где } n \in \mathbf{Z}. \qquad (6)$$

Формулы (3) — (6) являются теоремами в отличие от формул (1) — (2), введенных как определения.

Пример 1. Выразите через $\operatorname{tg}\alpha$: а) $\cos\alpha$; б) $\sin\alpha$.

Решение. а) Воспользуемся соотношением (5). Из него найдем:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}, \text{ откуда } |\cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

б) Воспользуемся соотношением (1). Из него найдем: $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha$. Теперь, зная выражение $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$, получим: $|\sin\alpha| = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$.

Пример 2. Упростите выражение $(1-\cos\alpha)\cdot(1+\cos\alpha) - \sin^2\alpha$.

Решение. $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha) - \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = 1 - 1 = 0$.

Пример 3. Упростите выражение $\frac{\sin^4 t + \cos^4 t - 1}{\sin^6 t + \cos^6 t - 1}$.

Решение.

$$\frac{\sin^4 t + \cos^4 t - 1}{\sin^6 t + \cos^6 t - 1} = \frac{(\sin^2 t)^2 + \cos^4 t - 1}{(\sin^2 t)^3 + \cos^6 t - 1} = \frac{(1-\cos^2 t)^2 + \cos^4 t - 1}{(1-\cos^2 t)^3 + \cos^6 t - 1} =$$
$$= \frac{1 - 2\cos^2 t + \cos^4 t + \cos^4 t - 1}{1 - 3\cos^2 t + 3\cos^4 t - \cos^6 t + \cos^6 t - 1} = \frac{2\cos^2 t\,(\cos^2 t - 1)}{3\cos^2 t\,(\cos^2 t - 1)} = \frac{2}{3}.$$

Пример 4. Докажите тождество:

$$\sin^3\alpha\,(1+\operatorname{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha\,(1+\operatorname{tg}\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha.$$

Решение. $\sin^3\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)=$

$$=\sin^3\alpha\left(1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)+\cos^3\alpha\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=$$

$$=\sin^3\alpha\,\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}+\cos^3\alpha\cdot\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}=$$

$$=\sin^2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)+\cos^2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)=$$

$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=$$

$$=\sin\alpha+\cos\alpha,\ \sin\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha+\cos\alpha.$$

Пример 5. Известно, что $\cos\alpha=-\frac{2}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найдите значения $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение. 1. Из соотношения (3) находим:

$$|\sin\alpha|=\sqrt{1-\cos^2\alpha},\quad |\sin\alpha|=\sqrt{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{5}.$$

В заданном интервале $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ значения $\sin\alpha$ положительны, поэтому $\sin\alpha=\frac{\sqrt{21}}{5}$.

2. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{\sqrt{21}}{5}}{-\frac{2}{5}}=-\frac{\sqrt{21}}{2}$.

3. $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{2}{\sqrt{21}}=-\frac{2\sqrt{21}}{21}$.

Упражнения

1. По данному значению одной из тригонометрических функций и интервалу, в котором находится аргумент, найдите значения остальных функций:

а) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; б) $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha=2$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

2. Существует ли такое значение аргумента x, при котором:

а) $\sin x=\frac{2}{3}$ и $\operatorname{tg}x=\frac{1}{3}$; б) $\sin x=1$ и $\cos x=1$;

в) $\sin x=0$ и $\cos x=0$; г) $\sin x=\frac{12}{13}$ и $\operatorname{ctg}x=\frac{5}{12}$?

3. Найдите значение выражений:

а) $\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=-1$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

б) $\frac{3\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha=-2$;

в) $\sin\alpha\cos\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=1$;

г) $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=5$;

д) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos^2\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{5}{7}$.

4. Упростите выражения:

а) $\sin\alpha\cdot\sec\alpha$; б) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$; в) $\cos\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$;

г) $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sec\alpha$; д) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$; е) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

5. Упростите выражения:

а) $2-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$; б) $1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$;

в) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha$; г) $\sin^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+\cos^2\alpha$;

д) $\operatorname{cosec}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha$; е) $\sec^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha$;

ж) $\frac{2\sin^2\alpha-1}{\sin\alpha-\cos\alpha}$; з) $\sin^4\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

6. Докажите тождества:

а) $\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha+\cos^2\alpha}=1-\cos\alpha$;

б) $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)=\operatorname{tg}^2\alpha$;

в) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\cos^2\alpha}=2\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$;

г)* $(\sec\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha)^2+(\operatorname{cosec}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha)^2=\sec^2\alpha\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha$;

д) $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta=1$;

е) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$;

ж) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$;

з)* $\frac{1+\cos\alpha+\cos^2\alpha}{1+\sec^2\alpha+\sec\alpha}=\cos^2\alpha$.

7. Упростите выражения:

а) $\frac{1-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}-1$; б) $\sec x+\frac{\operatorname{tg}x}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}$;

в) $\frac{1-(\sin x-\cos x)^2}{1+\sin^2 x-\cos^2 x}$; г) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}+\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

д) $\frac{\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha-1}-\frac{3\cos^2\alpha}{1-2\cos^2\alpha}$; е) $\frac{1}{\cos^2 t}-\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 t}-\frac{\sin^2 t}{\operatorname{tg}^2 t}$.

8. Докажите тождества:

а) $\operatorname{tg}^2 x-\sin^2 x=\operatorname{tg}^2 x\cdot\sin^2 x$;

б) $\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$;

в) $\frac{\cos^3\alpha+\sin^3\alpha}{(1-\cos\alpha\sin\alpha)\sin\alpha}-1=\operatorname{ctg}\alpha$;

г)* $\frac{3-\operatorname{cosec}^2\alpha}{1-3\sin^2\alpha}+\operatorname{ctg}^2\alpha=-1$;

д) $\frac{\cos x+\sin x\cdot\operatorname{ctg}x}{\operatorname{tg}x}+2\sin x=\frac{2}{\sin x}$;

е) $\frac{(1+\operatorname{ctg}x)\cdot\sin^2 x+(1+\operatorname{tg}x)\cos^2 x}{(\sin x+\cos x)^2}=1$;

ж) $\frac{\sin^2 t}{\sin t-\cos t}-\frac{\sin t+\cos t}{\mathrm{tg}^2 t-1}=\sin t+\cos t;$

з) $\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha}{\mathrm{ctg}^2\alpha}+\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\mathrm{ctg}\,\alpha}=1.$

9. Упростите выражение $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$, если $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

§ 47. ПОНЯТИЕ ЧЕТНОЙ И НЕЧЕТНОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим функции $f(x)=x^2$ (рис. 141) и $\varphi(x)=x^3$ (рис. 142). Каждая из них задана на всем множестве действительных чисел. Зафиксируем два различных значения аргумента, равных по абсолютной величине и отличающихся знаком, например 2 и -2. Сравним соответствующие значения каждой из рассматриваемых функций:

$$f(2)=2^2=4 \text{ и } f(-2)=(-2)^2=4,$$
$$\text{т. е. } f(2)=f(-2);$$
$$\varphi(2)=2^3=8, \text{ однако } \varphi(-2)=(-2)^3=$$
$$=-8, \text{ т. е. } \varphi(-2)=-\varphi(2).$$

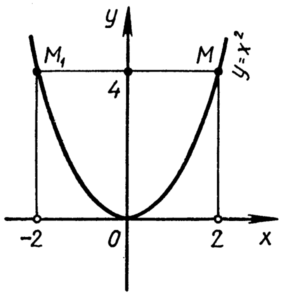


Рис. 141

Нетрудно догадаться, что для функции $f(x)=x^2$ справедливо следующее равенство: $f(-x)=f(x)$; такую функцию называют четной. Для функции $\varphi(x)=x^3$ справедливо равенство $\varphi(-x)=-\varphi(x)$; такую функцию называют нечетной.

Существуют, однако, функции, не относящиеся ни к четным, ни к нечетным. Рассмотрим, например, функцию $\psi(x)=x+1$, заданную на всем множестве действительных чисел, $\psi(-x)=-x+1$. Ясно, что $\psi(-x)\neq\psi(x)$, а также $\psi(-x)\neq-\psi(x)$, поэтому функцию $\psi(x)=x+1$ нельзя отнести ни к четным, ни к нечетным функциям.

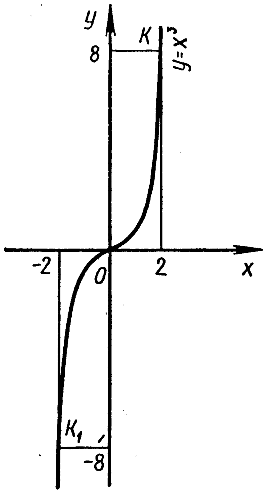


Рис. 142

Определение 1. **Функция $f(x)$ с областью определения D называется четной, если для любого $x\in D$ и $-x\in D$ выполняется равенство $f(x)=f(-x)$.**

Задание 1. Докажите, что функция $f(x)=|x|$ четная.

Определение 2. **Функция $f(x)$ с областью определения D называется нечетной, если для любого $x\in D$ и $-x\in D$ выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$.**

Задание 2. Докажите, что функция $f(x)=x$ нечетная.

Задание 3. Докажите, что функция $f(x)=2-x$ не является ни четной, ни нечетной.

Из определения четной функции непосредственно следует, что ее график симметричен относительно оси ординат (см. рис. 141). Действительно, если $y=f(x)$ — четная функция, то $f(-x)=f(x)$ и точки $M(x;\ f(x))$ и $M_1(-x;\ f(x))$ графика рассматриваемой функции симметричны относительно оси ординат.

Из определения нечетной функции непосредственно следует, что ее график симметричен относительно начала координат (см. рис. 142). Действительно, если $y=f(x)$ — нечетная функция, то $f(-x)=-f(x)$ и точки $K(x;\ f(x))$ и $K_1(-x;\ -f(x))$ графика рассматриваемой функции симметричны относительно начала координат.

Графики функций, не являющиеся ни четными, ни нечетными, не симметричны относительно оси ординат и не симметричны относительно начала координат.

Нетрудно доказать и обратные утверждения.

1. Если график функции $f(x)$ с областью определения D симметричен относительно оси ординат, то эта функция четная.
2. Если график функции $\varphi(x)$ с областью определения D симметричен относительно начала координат, то эта функция нечетная.

Докажите эти утверждения самостоятельно.

Упражнения

1. На рисунках 143—150 изображены графики функций, заданных на множестве $[a;\ b]$. Установите, какие из приведенных функций: а) четные; б) нечетные; в) ни четные и ни нечетные.

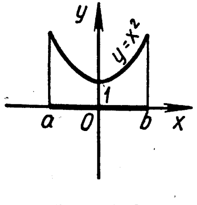


Рис. 143

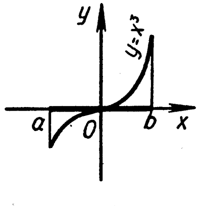


Рис. 144

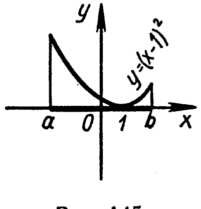


Рис. 145

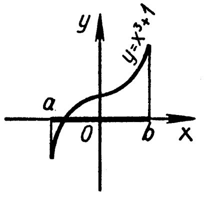


Рис. 146

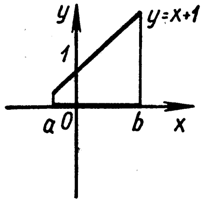


Рис. 147

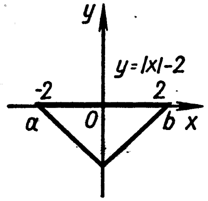


Рис. 148

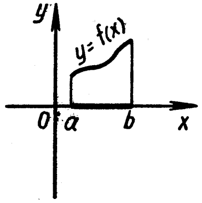


Рис. 149

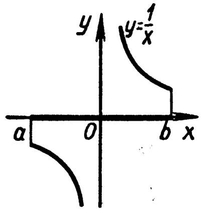


Рис. 150

2. Докажите, что функция $f(x)=x^4$ четная.

3. Докажите, что функция $f(x)=x^5$ нечетная.

4. Докажите, что функция $f(x)=2x-1$ ни четная и ни нечетная.

5. Какие из приведенных ниже функций четные, какие нечетные, какие ни четные и ни нечетные: а) $y=2x$; б) $y=\frac{2}{x}$; в) $y=x^2+4$; г) $y=(x-3)^2$; д) $y=2x-5$; е) $y=|2x-5|$; ж) $y=x^2-x+3$?

§ 48. ЧЕТНОСТЬ И НЕЧЕТНОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Теорема. ***Функция* $\cos\alpha$ *четная, функции* $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ *нечетные.***

Доказательство. 1. Рассмотрим функцию $\cos\alpha$. Она задана на множестве всех действительных чисел. Рассмотрим единичную окружность (рис. 151), произвольное значение аргумента α и значение аргумента $-\alpha$. Найдем соответствующие значения функции косинус. Числу α соответствует точка P_α единичной окружности, а числу $-\alpha$ — точка $P_{-\alpha}$ этой окружности. Точки P_α и $P_{-\alpha}$ симметричны относительно оси абсцисс, поэтому их абсциссы (значения косинуса) совпадают. Таким образом, при любом α выполняется равенство $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, означающее, что функция $\cos\alpha$ четная.

2. Рассмотрим функцию $\sin\alpha$, заданную на множестве всех действительных чисел. Найдем значения этой функции для $-\alpha$. Из симметрии точек P_α и $P_{-\alpha}$ единичной окружности (рис. 151) относительно оси абсцисс следует, что их ординаты (значения синуса) противоположны. Таким образом, при любых α выполняется равенство $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, означающее, что функция $\sin\alpha$ нечетная.

3. Докажем нечетность функции тангенс. Вначале заметим, что если $\alpha\in D(\operatorname{tg})$, то и $-\alpha\in D(\operatorname{tg})$.

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha.$$

Равенство $\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$ означает, что функция тангенс нечетная.

4. Докажем нечетность функции котангенс. Заметим, что если $\alpha\in D(\operatorname{ctg})$, то и $-\alpha\in D(\operatorname{ctg})$.

$$\operatorname{ctg}(-\alpha)=\frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Равенство $\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$ означает, что функция котангенс нечетная.

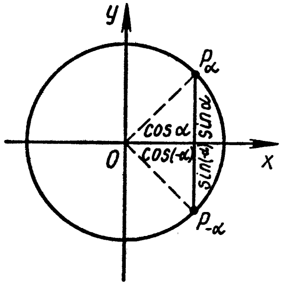


Рис. 151

Пример 1. Вычислите значения функций $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ при $\alpha=330°$.

Решение. $R_O^{330°}=R_O^{-30°}$, поэтому

$$\sin 330°=\sin(-30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2};$$
$$\cos 330°=\cos(-30°)=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$\operatorname{tg} 330°=\operatorname{tg}(-30°)=-\operatorname{tg} 30°=-\frac{\sqrt{3}}{3};$$
$$\operatorname{ctg} 330°=\operatorname{ctg}(-30°)=-\operatorname{ctg} 30°=-\sqrt{3}.$$

Пример 2. Упростите выражение:

$$\frac{(\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha))^2-1}{\cos^2(-\alpha)-\sin^2(-\alpha)-1}.$$

Решение. Воспользуемся равенствами $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$. Получим:

$$\frac{(\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha))^2-1}{\cos^2(-\alpha)-\sin^2(-\alpha)-1}=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2-1}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-1}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-2\cos\alpha\sin\alpha+\sin^2\alpha-1}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}=\frac{-2\cos\alpha\sin\alpha}{-2\sin^2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Упражнения

1. Докажите четность функции секанс.

2. Докажите нечетность функции косеканс.

3. Вычислите значения тригонометрических функций при значении аргумента, равном 315°.

4. Вычислите значения тригонометрических функций при значении аргумента, равном $\frac{5}{3}\pi$.

5. Вычислите значения выражений:

а) $\dfrac{1+\operatorname{tg}(-60°)}{\sin 60°+\sin(-30°)}$; б) $\dfrac{2-\sin(-45°)\cos(-45°)}{\operatorname{tg}(-45°)\cdot\operatorname{ctg}45°}$.

6. Упростите выражения:

а) $\dfrac{(\cos(-\alpha)-\sin(-\alpha))^2}{1-2\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}$; б) $\dfrac{\cos(-\alpha)}{1-2\sin^2(-\alpha)}-\dfrac{\sin(-\alpha)}{1-2\cos^2(-\alpha)}$.

7. Докажите, что функция $f(x)=\sin x+\operatorname{tg} x$ нечетная.

8. Докажите, что функция $f(x)=\sin 2x\cdot\operatorname{tg} x$ четная.

9. Докажите, что функция $f(x)=\frac{x^2}{\cos 2x}$ четная.

10. Докажите, что функция $f(x)=x^3\sin x$ четная.

11. Докажите, что функция $f(x)=x^2+\sin x$ не является ни четной, ни нечетной.

§ 49. ПЕРИОДИЧНОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Процесс, который повторяется через один и тот же промежуток времени, называют периодическим. В природе и технике мы часто встречаемся с периодическими процессами. Например, вращение Земли вокруг Солнца — периодический процесс с временным промежутком (периодом) в один год. Земля вращается вокруг Солнца по траектории, близкой к эллипсу. Расстояние между Землей и Солнцем с течением времени меняется, однако в любой момент времени и ровно через год после этого расстояние между Землей и Солнцем одно и то же.

Функции, описывающие периодические процессы, также называют периодическими. Для каждой периодической функции, таким образом, существует число, отличное от нуля (период функции), прибавление которого к произвольному значению аргумента не меняет значения функции.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x)=\{x\}$ — дробную часть числа (рис. 152). График функции $f(x)=\{x\}=x-[x]$ изображен на рисунке 152. Ясно, что если прибавить к любому числу x единицу, то дробная часть этого числа не изменится. Поэтому $f(x+1)=\{x+1\}=f(x)$. Например, $\{5{,}3\}=\{6{,}3\}=0{,}3$. Это равенство означает, что функция $f(x)=\{x\}$ периодическая с периодом, равным 1. Очевидно, любое целое число, отличное от нуля, будет периодом рассматриваемой функции, число же 1 является ее наименьшим периодом.

Определение. **Функция $f(x)$ с областью определения D называется периодической, если существует такое число $t\neq 0$, что для любого $x\in D$ числа $x+t$ и $x-t$ также принадлежат D и выполняется равенство**

$$f(x+t)=f(x).$$

Из этого определения следует, что $f(x-t)=f(x)$.

Докажем теперь, что тригонометрические функции периодические.

Теорема 1. ***Функции* $\sin\alpha$ *и* $\cos\alpha$ *периодические с наименьшим положительным периодом* 2π.**

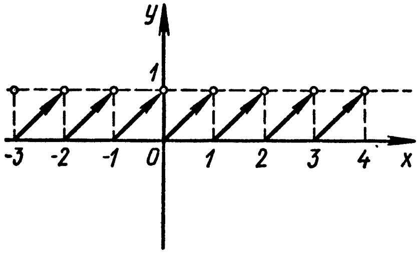


Рис. 152

Доказательство. Областью определения функции синус и косинус является множество всех действительных чисел. Поэтому числа α, $\alpha+2\pi$, $\alpha-2\pi$, ... принадлежат области определения функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Рассмотрим единичную окружность (рис. 153). Пусть P_α — точка этой окружности, соответствующая числу α. Вращение плоскости $R_O^{2\pi}$ есть тождественное отображение плоскости на себя, поэтому

$$R_O^{\alpha+2\pi}=R_O^{\alpha}=R_O^{\alpha-2\pi}.$$

Числам α, $\alpha+2\pi$, $\alpha-2\pi$ соответствует одна и та же точка единичной окружности P_α.

Поэтому

$$\sin(\alpha+2\pi)=\sin\alpha=\sin(\alpha-2\pi),$$
$$\cos(\alpha+2\pi)=\cos\alpha=\cos(\alpha-2\pi).$$

Аналогично можно показать, что функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ периодические с периодом 2π.

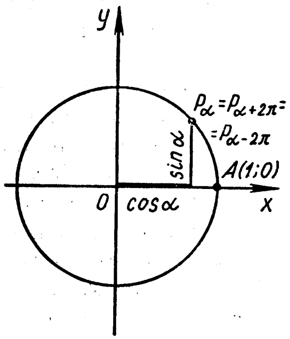


Рис. 153

Из приведенных равенств следует, что числа 4π, 6π, 8π, ..., -4π, -6π, -8π, ..., т. е. числа вида $2k\pi$, где $k\in \boldsymbol{Z}$, также периоды функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$:

$$\sin(\alpha+2\pi k)=\sin\alpha,$$
$$\cos(\alpha+2\pi k)=\cos\alpha.$$

В градусной системе измерения угловых величин эти равенства записывают так:

$$\sin(\alpha+360^\circ k)=\sin\alpha,$$
$$\cos(\alpha+360^\circ k)=\cos\alpha.$$

Число 2π является наименьшим положительным периодом функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

▶ [1] Докажем, что число 2π есть наименьший положительный период функции $\cos\alpha$. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что существует такое число $0<m<2\pi$, что для всех значений α выполняется равенство $\cos(\alpha+m)=\cos\alpha$. Покажем, что существуют такие значения α, при которых это равенство не выполняется. Пусть $\alpha=0$, тогда $\cos m=\cos 0=1$. На единичной окружности есть только одна точка с абсциссой 1. Это точка $A(1;\ 0)$. Точке A соответствуют только числа вида $2k\pi$, где $k\in\boldsymbol{Z}$. Среди этих чисел нет ни одного числа m, такого, что $0<m<2\pi$. Поэтому $\cos m\neq 1$. Полученное противоречие доказывает, что число 2π — наименьший положительный период функции $\cos\alpha$. Аналогично можно доказать, что число 2π — наименьший положительный период функции $\sin\alpha$. ◀

Теорема 2. ***Функции* $\operatorname{tg}\alpha$ *и* $\operatorname{ctg}\alpha$ *периодические с наименьшим положительным периодом* π.**

---

[1] Здесь и далее материал, расположенный от знака ▶ до знака ◀, предназначен учащимся, проявляющим повышенный интерес к математике.

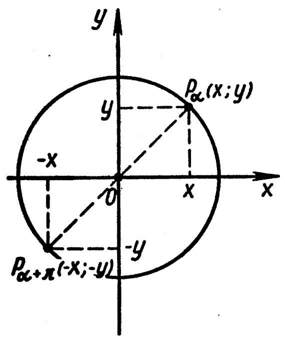


Рис. 154

Доказательство. Рассмотрим единичную окружность (рис. 154). При любом значении аргумента α из области определения функции $\operatorname{tg}\alpha$ значения $\alpha+\pi$ и $\alpha-\pi$ также принадлежат области определения этой функции. Пусть точка P_α, соответствующая числу α, имеет координаты $(x;\ y)$, тогда точка $P_{\alpha+\pi}$, соответствующая числу $\alpha+\pi$, симметрична точке P_α относительно начала координат и имеет координаты $(-x;\ -y)$. Таким образом, имеем:

$$\sin\alpha=y,\ \cos\alpha=x;$$

$$\sin(\alpha+\pi)=-y,\ \cos(\alpha+\pi)=-x;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\pi)=\frac{\sin(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)}=\frac{-y}{-x}=\frac{y}{x}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Это означает, что число π — период функции тангенса.

Аналогично:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\pi)=\frac{\cos(\alpha+\pi)}{\sin(\alpha+\pi)}=\frac{-x}{-y}=\frac{x}{y}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Это означает, что число π — период функции котангенс.

Очевидно, что числа 2π, 3π, 4π, ..., -2π, -3π, -4π, ..., т. е. числа вида $k\pi$, где $k\in\mathbf{Z}$, также будут периодами функций тангенс и котангенс.

Следовательно,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\pi k)=\operatorname{tg}\alpha,\ k\in\mathbf{Z};$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha+\pi k)=\operatorname{ctg}\alpha,\ k\in\mathbf{Z}.$$

В градусной системе измерения угловых величин эти равенства имеют вид:

$$\operatorname{tg}(\alpha+180^\circ k)=\operatorname{tg}\alpha,\ k\in\mathbf{Z},$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha+180^\circ k)=\operatorname{ctg}\alpha,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Можно доказать, число π — наименьший положительный период функций $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

▶ Докажем, например, что число π — наименьший положительный период тангенса. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что существует такое число $0<m<\pi$, что для всех значений α выполняется равенство $\operatorname{tg}(\alpha+m)=\operatorname{tg}\alpha$. Пусть $\alpha=0$, тогда $\operatorname{tg}m=\operatorname{tg}0=0$. Но на промежутке $]0;\ \pi[$ функция $\operatorname{tg}\alpha$ в нуль не обращается. Поэтому нет такого числа $m\in]0;\ \pi[$, при котором $\operatorname{tg}m=0$. Полученное противоречие доказывает, что число π — наименьший положительный период функции $\operatorname{tg}\alpha$.

Аналогично можно доказать, что число π — наименьший положительный период функции $\operatorname{ctg}\alpha$. ◀

В дальнейшем наименьший положительный период функции мы часто будем называть основным периодом функции.

Пример 2. Вычислите $\sin 1470^\circ$.

Решение. Период синуса равен 360°. Разделим число 1470 на 360, получим:

$$1470^\circ=360^\circ\cdot4+30^\circ,$$
$$\sin1470^\circ=\sin(360^\circ\cdot4+30^\circ)=\sin30^\circ=\frac{1}{2}.$$

Пример 3. Вычислите $\operatorname{tg}945^\circ$.

Решение. Период тангенса равен 180°. Разделим число 945 на 180, получим: $945^\circ=180^\circ\cdot5+45^\circ$.

$$\operatorname{tg}945^\circ=\operatorname{tg}(180^\circ\cdot5+45^\circ)=\operatorname{tg}45^\circ=1.$$

Пример 4. Найдите наименьший положительный период функции $y=\cos3x$.

Решение. Пусть m — период функции $\cos3x$. Тогда $\cos3(x+m)=\cos3x$ для любого $x\in\mathbf{R}$. Пусть $x=0$, тогда $\cos3m=\cos0=1$. На промежутке $[0;\ 2\pi]$ уравнение $\cos3m=1$ имеет два решения: $3m=0$ и $3m=2\pi$. По условию $m\neq0$, поэтому $m=\frac{2\pi}{3}$. Следовательно, $m=\frac{2\pi}{3}$ — наименьший положительный период функции $y=\cos3x$.

Пример 5. Найдите период функции $f(x)=\sin6x$.

Решение. Так как основной период функции $y=\sin x$ равен 2π, то основной период функции $y=\sin6x$ равен $\frac{2\pi}{6}$, т. е. $\frac{\pi}{3}$. Действительно,

$$f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(6\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)=\sin(6x+2\pi)=\sin6x=f(x).$$

Пример 6. Найдите основной период функции $f(x)=\sin2x+\cos4x$.

Решение. Основной период функции $\sin2x$ равен $\frac{2\pi}{2}=\pi$, основной период функции $\cos4x$ равен $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$. Нетрудно догадаться, что основной период данной функции есть наименьшее общее кратное чисел π и $\frac{\pi}{2}$, т. е. число π.

Действительно,

$$f(x+\pi)=$$
$$=\sin(2(x+\pi))+\cos(4(x+\pi))=\sin(2x+2\pi)+\cos(4x+4\pi)=$$
$$=\sin2x+\cos4x=f(x).$$

Упражнения

1. Найдите значения:

а) $\sin 1500°$; б) $\cos 1140°$; в) $\operatorname{tg} 1860°$;
г) $\operatorname{ctg} 1125°$; д) $\sin(-780°)$; е) $\cos(-1110°)$;
ж) $\operatorname{tg}(-390°)$; з) $\operatorname{ctg}(-420°)$.

2. Найдите значения:

а) $\sin\frac{33\pi}{4}$; б) $\cos\frac{19\pi}{3}$;
в) $\operatorname{tg}\frac{31\pi}{6}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{4}$.

3. Найдите наименьший положительный период у функции:

а) $\sin 2x$; б) $\cos 4x$;
в) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; г) $\operatorname{ctg} 3x$.

4. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\cos(\alpha-2\pi)\cdot\operatorname{tg}(\alpha+\pi)\cdot\sin(\alpha-4\pi)}{3\sin(6\pi+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(\alpha-3\pi)}$;

б) $\dfrac{\cos(\alpha+2\pi)\cdot\operatorname{tg}(\alpha-\pi)+\operatorname{ctg}(\alpha+\pi)\cdot\sin(2\pi-\alpha)}{\cos(\alpha+4\pi)\cdot\cos(\alpha-2\pi)+\sin(2\pi+\alpha)\cdot\sin(\alpha-4\pi)}$.

5. Найдите основной период функций:

а) $f(x)=\sin 3x+\cos 5x$; б) $f(x)=\cos 12x+\operatorname{tg} 4x$.

§ 50. ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ *sin x* И *cos x*

Прежде чем строить графики тригонометрических функций, отметим, что каждая из них непрерывна на всей области своего определения. Это означает, что

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a, \text{ если } a\in D(\sin x)=\boldsymbol{R};$$
$$\lim_{x\to a}\cos x=\cos a, \text{ если } a\in D(\cos x)=\boldsymbol{R};$$
$$\lim_{x\to a}\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} a, \text{ если } a\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z};$$
$$\lim_{x\to a}\operatorname{ctg} x=\operatorname{ctg} a, \text{ если } a\neq\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

Эти утверждения можно доказать, однако мы примем их без доказательства.

1. *График функции* $y=\sin x$.

Вспомним изученные свойства функции $y=\sin x$. Функция $y=\sin x$:

1) определена на всем множестве действительных чисел: $x\in\boldsymbol{R}$;

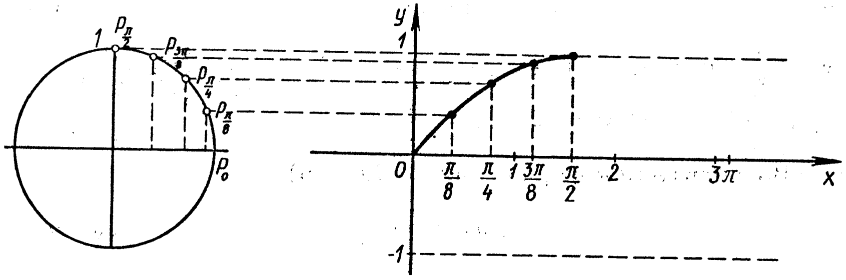


Рис. 155

2) имеет множеством значений отрезок $[-1; 1]$, поэтому ее график расположен в полосе, ограниченной прямыми $y=1$ и $y=-1$;

3) нечетна, поэтому ее график симметричен относительно начала координат; можно построить его часть вначале для $x\geqslant 0$, а часть графика для $x<0$ будет симметрична построенной части относительно начала координат;

4) периодична с наименьшим положительным периодом 2π; можно построить ее график вначале для $x\in[0; 2\pi]$; поведение функции на оставшейся части числовой прямой будет повторяться с периодом 2π;

5) с возрастанием x от 0 до $\frac{\pi}{2}$ возрастает от 0 до 1;

с возрастанием x от $\frac{\pi}{2}$ до π убывает от 1 до 0;

с возрастанием x от π до $\frac{3\pi}{2}$ убывает от 0 до -1;

с возрастанием x от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π возрастает от -1 до 0;

6) непрерывна на множестве действительных чисел (этот факт принимаем без доказательства, опираясь на наглядное представление о непрерывном изменении ординаты точки, вращающейся вокруг начала координат по единичной окружности).

Теперь мы можем приступить к построению графика функции $y=\sin x$. На рисунке 155 показано построение графика для $x\in\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; слева изображена единичная окружность. На рисунке 156 изображен график функции $y=\sin x$ для $x\in[0; 2\pi]$. На рисунке 157 изображен график функции $y=\sin x$ для $x\in[-2\pi; 2\pi]$, полученный из графика этой функции для

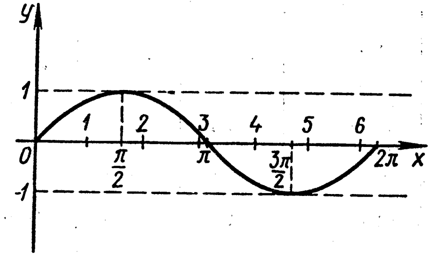


Рис. 156

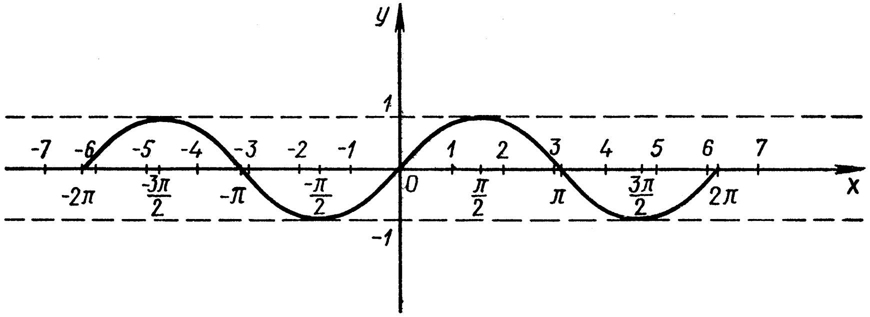


Рис. 157

$x \in [0;\ 2\pi]$ с помощью центральной симметрии с центром в начале координат.

Задание. Проследите выполнение сформулированных выше свойств 1—6 функции $y = \sin x$ по ее графику.

2. *График функции $y = \cos x$.*

Вспомним вначале свойства функции $y = \cos x$. Функция $y = \cos x$:

1) определена на всем множестве действительных чисел: $x \in \boldsymbol{R}$;

2) имеет множеством значений отрезок $[-1;\ 1]$, поэтому ее график расположен в полосе, ограниченной прямыми $y = 1$ и $y = -1$;

3) четна, поэтому ее график симметричен относительно оси ординат; можно построить его часть вначале для $x \geqslant 0$, а часть графика для $x < 0$ будет симметрична построенной части относительно оси ординат;

4) периодична с наименьшим положительным периодом 2π; поэтому можно построить ее график для $x \in [0;\ 2\pi]$; поведение функции на остальной части числовой прямой будет повторяться с периодом 2π;

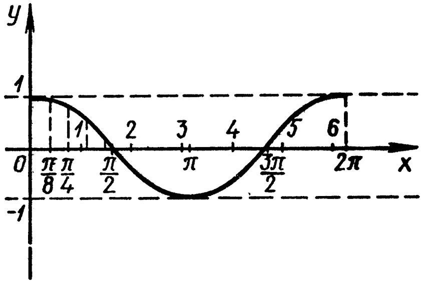


Рис. 158

5) с возрастанием x от 0 до $\frac{\pi}{2}$ убывает от 1 до 0; с возрастанием x от $\frac{\pi}{2}$ до π убывает от 0 до -1; с возрастанием x от π до $\frac{3\pi}{2}$ возрастает от -1 до 0; с возрастанием x от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π возрастает от 0 до 1;

6) непрерывна на множестве действительных чисел (этот факт мы принимаем без доказательства, опираясь на наглядное представление о непрерывном изменении абсциссы точки, вращающейся вокруг начала координат по единичной окружности).

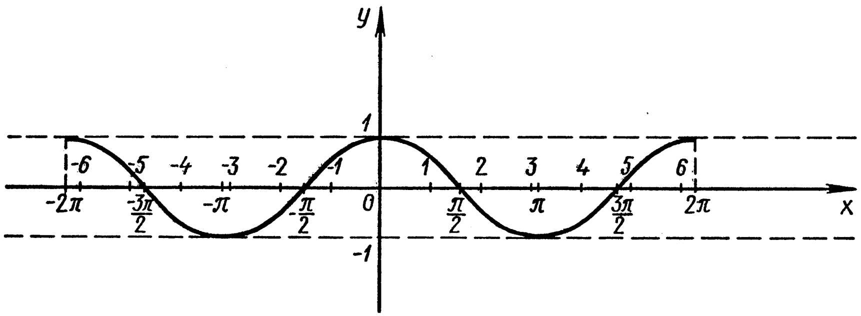


Рис. 159

Приступим теперь к построению графика функции $y = \cos x$. На рисунке 158 показано построение графика для $x \in [0;\ 2\pi]$. На рисунке 159 изображен график функции $y = \cos x$ для $x \in [-2\pi;\ 2\pi]$, полученный из графика этой функции для $x \in [0;\ 2\pi]$ с помощью осевой симметрии S_{Oy}.

Упражнения

1. Пользуясь графиком функции $y = \sin x$ (рис. 156), решите неравенство $\sin x > 0$, если $x \in [0;\ 2\pi]$.

2. Пользуясь графиком функции $y = \cos x$ (рис. 158), решите неравенство $\cos x < 0$, если $x \in [0;\ 2\pi]$.

3. Найдите нули функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ на промежутке $[-2\pi;\ 2\pi]$, пользуясь графиками этих функций.

4. Пользуясь графиками функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$, найдите множество решений уравнения: а) $\sin x = 1$; б) $\cos x = 1$; в) $\sin x = -1$; г) $\cos x = -1$.

5. Постройте графики функций:

а) $y = \sin 2x$; б) $y = \cos 2x$; в) $y = 2 + \sin x$;
г) $y = -2 + \cos x$; д) $y = 2\sin x$; е) $y = -\sin x$;
ж) $y = 2\cos x$; з) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; и) $y = |\sin x|$;
к) $y = |\cos x|$.

§ 51. ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ tg x И ctg x

1. *График функции $y = \operatorname{tg} x$.*

Вспомним свойства функции $y = \operatorname{tg} x$. Функция $y = \operatorname{tg} x$:

1) определена на множестве всех действительных чисел, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \dots$;

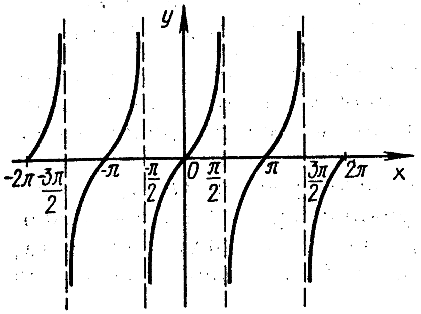


Рис. 160

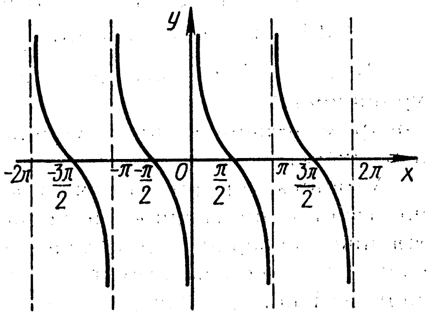


Рис. 161

2) имеет в качестве множества значений множество всех действительных чисел;

3) нечетна, поэтому ее график симметричен относительно начала координат;

4) периодична с наименьшим положительным периодом π;

5) с возрастанием x от 0 до $\frac{\pi}{2}$ возрастает от 0 до ∞, с возрастанием x от $\frac{\pi}{2}$ до π также возрастает от $-\infty$ до 0, в точках $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ не определена;

6) непрерывна на всей области определения.

График функции $y=\operatorname{tg} x$ изображен на рисунке 160. Он состоит из бесконечного числа одинаковых ветвей.

2. *График функции* $y=\operatorname{ctg} x$ изображен на рисунке 161. Сформулируйте известные вам свойства функции $y=\operatorname{ctg} x$, пользуясь ее графиком.

Упражнения

1. Пользуясь графиком функции $y=\operatorname{tg} x$ (рис. 160), найдите ее нули.

2. Пользуясь графиком функции $y=\operatorname{ctg} x$ (рис. 161), найдите ее нули.

3. Пользуясь графиком функции $y=\operatorname{tg} x$ (рис. 160), решите неравенство $\operatorname{tg} x<0$ для $x \in [0; \pi]$.

4. Пользуясь графиком функции $y=\operatorname{ctg} x$ (рис. 161), решите неравенство $\operatorname{ctg} x>0$ для $x \in [0; \pi]$.

5. Постройте графики функций:

а) $y=\operatorname{tg} 2x$; б) $y=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$; в) $y=|\operatorname{tg} x|$; г) $y=|\operatorname{ctg} x|$; д) $y=2+\operatorname{tg} x$.

§ 52. РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА МНОЖЕСТВЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Выше в § 45 мы решали простейшие тригонометрические уравнения $\sin x=a$ и $\cos x=b$ на промежутке от 0 до 2π. Рассмотрим решение таких уравнений на множестве действительных чисел.

Уточним задачу. Если задано некоторое число x, то существует единственное значение функции $\sin x$. Обратное утверждение неверно. Определенному значению функции $\sin x$, $|\sin x| \leqslant 1$ соответствует не одно, а бесконечное множество значений переменной x.

Решить тригонометрическое уравнение означает найти множество значений переменной, соответствующих заданному значению тригонометрической функции.

1. *Решение уравнения* $\sin x=a$.

Множеством значений функции $y=\sin x$ является отрезок $[-1; 1]$, поэтому рассматриваемое уравнение имеет решения лишь при $|a| \leqslant 1$.

Пусть, например, $0<a<1$, тогда на промежутке $[0; 2\pi]$ данное уравнение имеет два корня x_0 и x_1 (рис. 162), причем $x_1=\pi-x_0$. Графически эти корни есть абсциссы точек пересечения синусоиды $y=\sin x$ и прямой $y=a$. В силу периодичности функции $y=\sin x$ для нахождения множества всех решений данного уравнения надо к каждому из найденных корней прибавить числа вида $2\pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. Поэтому решением уравнения $\sin x=a$ в рассматриваемом случае будет объединение двух множеств значений переменной: $x=x_0+2\pi k$ или $x=\pi-x_0+2\pi k=-x_0+(2k+1)\pi$, где $k \in \boldsymbol{Z}$.

Для $-1<a<0$ получаются аналогичные множества решений.

Полученные множества решений уравнения можно искусственно объединить в одну формулу. Для этого заметим, что $(-1)^n$ равно 1 при $n=2k$ (четном) и равно -1 при $n=2k+1$ (нечетном). Поэтому вместо двух установленных формул можно написать одну:

$$x=(-1)^n x_0+\pi n, \text{ где } n \in \boldsymbol{Z}.$$

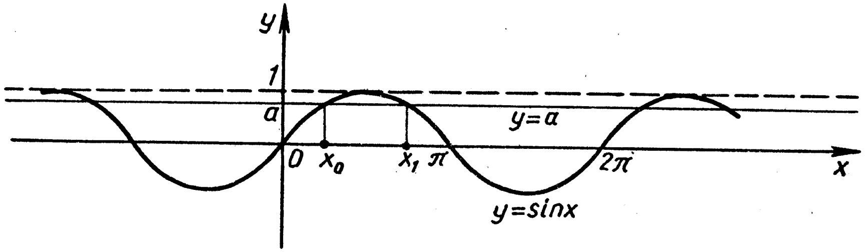


Рис. 162

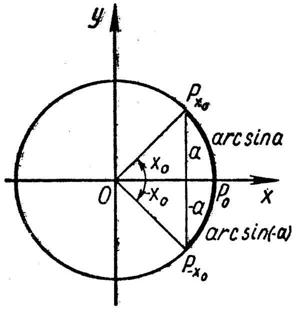


Рис. 163

Мы вывели формулу корней тригонометрического уравнения $\sin x = a$ $(|a| \leqslant 1)$. Эта формула выражает множество всех корней данного уравнения через один из них x_0. В качестве x_0 можно было выбрать любой корень данного уравнения.

Например, множество решений уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ можно записать формулой $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, а можно записать и формулой $x = (-1)^n \frac{5\pi}{6} + \pi n$, так как числа $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$ — корни данного уравнения. Каждая из приведенных формул определяет одно и то же множество решений, хотя вид их различен. Такое различие в формах ответов неудобно, поэтому договорились x_0 выбирать из таких промежутков, на которых рассматриваемая тригонометрическая функция принимает все свои значения, причем каждое из них только один раз. Например, для функции $y = \sin x$ в качестве такого промежутка выбирают отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. На этом отрезке $\sin x$ принимает все свои значения от -1 до 1, причем каждое из них только один раз.

Решение x_0 уравнения $\sin x = a$, взятое из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, называют главным; его обозначают $\arcsin a$ (читается: «арксинус a»): $x_0 = \arcsin a$. По-латински arcus — дуга; обозначение $\arcsin a$ — это угловая величина дуги, синус которой равен a. Таким образом, стандартная формула для множества решений уравнения $\sin x = a$ имеет вид:

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \text{ где } n \in \mathbf{Z}.$$

В градусной системе измерения угловых величин эта формула имеет вид: $x = (-1)^n \arcsin a + 180° n$, где $n \in \mathbf{Z}$ и $\arcsin a$ выражена в градусах. Для решения уравнения $\sin x = a$ важно также иметь в виду, что $\arcsin(-a) = -\arcsin a$, что нетрудно установить по единичной окружности (рис. 163). Например:

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6};$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}.$$

Пример 1. Решите уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Множество решений данного уравнения можно записать в стандартном виде: $x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Найдем $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$. Это угловая величина дуги из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которой равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ясно, что $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$. Поэтому множество решений данного уравнения имеет вид:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \text{ где } n \in \mathbf{Z}.$$

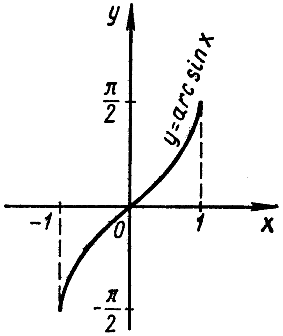


Рис. 164

▶ **Если некоторая функция $f(x)$ определена, непрерывна и возрастает (убывает) на некотором промежутке D, то множество ее значений есть некоторый промежуток E. Можно доказать, что в этом случае на промежутке E определена некоторая непрерывная функция $\varphi(x)$, обратная функции $f(x)$. Причем если функция $f(x)$ возрастает на промежутке D, то функция $\varphi(x)$ также возрастает на промежутке E; если же функция $f(x)$ убывает на промежутке D, то и функция $\varphi(x)$ убывает на промежутке E. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.**

Так, функция $y = \sin x$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает и непрерывна, в силу этого она принимает все свои значения от -1 до 1. Поэтому на промежутке $[-1; 1]$ существует обратная синусу функция, которую называют арксинус и обозначают $\arcsin x$. График функции $y = \arcsin x$ изображен на рисунке 164, он симметричен графику функции $y = \sin x$ относительно прямой $y = x$. Областью определения функции $y = \arcsin x$ служит промежуток $[-1; 1]$, а ее множеством значений — промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; эта функция возрастающая и нечетная. ◀

Градусную величину $\arcsin x$, где $x \in [-1; 1]$, находят в таблице VIII (из таблиц В. М. Брадиса). Радианную величину этой дуги можно найти затем в таблице XI. Например, если надо найти $\arcsin 0{,}5736$, то в таблице VIII находим $0{,}5736 \approx \sin 35°$, т. е. $\arcsin 0{,}5736 \approx 35°$; если надо найти радианную величину этой дуги, то в таблице XI находим $35° \approx 0{,}6109$, т. е. $\arcsin 0{,}5736 \approx 0{,}6109$. Многие электронносчетные машины, например микрокалькулятор «Электроника», позволяют сразу находить $\arcsin x$ как в градусах, так и в радианах.

Пример 2. Решите уравнение $\sin x = -0{,}72$.

Решение. $\arcsin(-0{,}72) = -\arcsin 0{,}72 \approx -46°3'$. Теперь записываем ответ в стандартном виде:

$$x \approx (-1)^n(-46°3') + 180° n \approx (-1)^{n+1} \cdot 46°3' + 180° \cdot n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Задание 1. Найдите значения: а) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $\arcsin 1$; г) $\arcsin(-0{,}25)$; д) $\arcsin 0$.

Задание 2. Решите уравнения: а) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin x=0{,}54$.

2. *Решение уравнения* $\cos x = a$.

Множеством значений функции $y=\cos x$ является отрезок $[-1;\ 1]$, поэтому рассматриваемое уравнение имеет решение лишь при $|a|\leqslant 1$. Пусть, например, $0<a<1$, тогда на промежутке $[0;\ 2\pi]$ данное уравнение имеет два корня x_0 и x_1 (рис. 165), причем $x_1=2\pi-x_0$ или $x_1=-x_0$.

В силу периодичности функции $y=\cos x$ для нахождения множества всех решений данного уравнения надо к каждому из найденных корней прибавить числа вида $2\pi k$, где $k\in \mathbf{Z}$. Поэтому решением уравнения $\cos x=a$ будет объединение двух множеств значений переменной $x=x_0+2\pi k$ или $x=-x_0+2\pi k$, где $k\in\mathbf{Z}$.

Для $-1<a<0$ получаются аналогичные множества решений. Полученные множества решений записывают в виде одной формулы:

$$x=\pm x_0+2\pi k,\ \text{где}\ k\in\mathbf{Z}.$$

Мы вывели формулу корней тригонометрического уравнения $\cos x=a$. Эта формула выражает множество всех корней данного уравнения через один из них x_0. В качестве x_0 можно было выбрать любой корень данного уравнения. Например, множество решений уравнения $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ можно записать формулой $x_0=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, а можно записать и формулой $x=\pm\frac{11\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, так как числа $\frac{\pi}{6}$ и $2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$ — корни данного уравнения. Каждая из приведенных формул определяет одно и то же множество решений, хотя вид их различен. Договорились для функции $y=\cos x$ значение x_0 выбирать из промежутка $[0;\ \pi]$. На этом промежутке $\cos x$ убывает от 1 до -1, т. е. принимает все свои значения, причем каждое из них только один раз.

Решение x_0 уравнения $\cos x=a$, взятое из промежутка $[0;\ \pi]$, называют главным, его обозначают $\arccos a$ (читается: «арккосинус a»), $x_0=\arccos a$ — это угловая величина дуги, косинус которой равен a.

Таким образом, стандартная формула для множества решений уравнения $\cos x=a$ имеет вид:

$$x=\pm\arccos a+2\pi n,\ \text{где}\ n\in\mathbf{Z}.$$

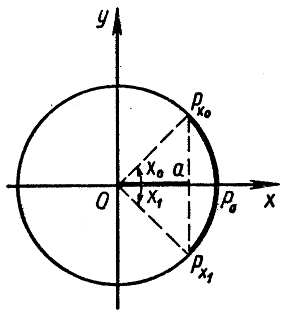


Рис. 165

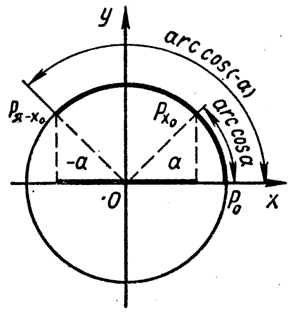


Рис. 166

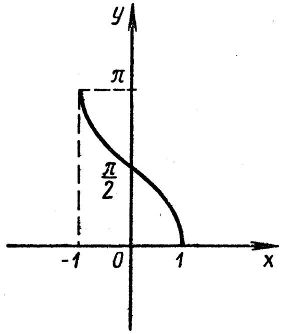


Рис. 167

В градусной системе измерения угловых величин эта формула имеет вид: $x=\pm\arccos\alpha+360^\circ n$, где $n\in\mathbf{Z}$ и $\arccos\alpha$ выражена в градусах.

Для решения уравнения $\cos x=a$ важно также иметь в виду, что $\arccos(-a)=\pi-\arccos a$, что нетрудно установить по единичной окружности (рис. 166). Например:

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{2}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3};$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}.$$

Пример 3. Решите уравнение $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. $x=\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi n$, где $n\in\mathbf{Z}$, или $x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, где $n\in\mathbf{Z}$.

Пример 4. Решите уравнение $\cos x=-0{,}61$.

Решение. $\arccos(-0{,}61)=180^\circ-\arccos 0{,}61\approx 180^\circ-52^\circ 24'=127^\circ 36'$.

$$x\approx\pm 127^\circ 36'+360^\circ\cdot n,\ \text{где}\ n\in\mathbf{Z}.$$

Задание 3. Найдите значения: а) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $\arccos(-1)$; г) $\arccos 0{,}73$.

Задание 4. Решите уравнения: а) $\cos x=\frac{1}{2}$; б) $\cos x=-\frac{1}{2}$; в) $\cos x=1$; г) $\cos x=0{,}37$.

▶ Функция $y=\cos x$ на промежутке $[0;\ \pi]$ убывает и непрерывна, в силу этого она принимает все свои значения от -1 до 1. Поэтому на промежутке $[-1;\ 1]$ существует обратная функция, которую называют арккосинус и обозначают $\arccos x$. График функции $y=\arccos x$ изображен на рисунке 167; он симметричен графику $y=\cos x$ относительно прямой $y=x$. Областью определения функции $y=\arccos x$ служит промежуток $[-1;\ 1]$, а ее множеством значений — промежуток $[0;\ \pi]$; это убывающая функция. ◀

3. *Решение уравнений* $\operatorname{tg} x=a$ *и* $\operatorname{ctg} x=a$.

Множеством значений функций $y=\operatorname{tg} x$ служит множество действительных чисел. Поэтому уравнение $\operatorname{tg} x=a$ имеет решение при любом значении a.

На промежутке $]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}[$ уравнение $\operatorname{tg} x=a$ имеет только одно решение x_0 (рис. 168). Графически x_0 — это абсцисса точки пересечения тангенсоиды $y=\operatorname{tg} x$ и прямой $y=a$ на промежутке $]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}[$. Функция $y=\operatorname{tg} x$ на этом промежутке возрастает от $-\infty$ до ∞, т. е. принимает все свои значения, причем каждое из них только один раз. Решение x_0 уравнения $\operatorname{tg} x=a$, взятое из промежутка $]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}[$, называют главным, его обозначают $\operatorname{arctg} a$ (читают: «арктангенс a»); $x_0=\operatorname{arctg} a$ — угловая величина дуги, тангенс которой равен a. В силу периодичности функции $y=\operatorname{tg} x$ (с периодом π) стандартная формула для множества решений уравнения $\operatorname{tg} x=a$ имеет вид:

$$x=\operatorname{arctg} a+\pi n, \text{ где } n\in \mathbf{Z}.$$

В градусной системе измерения угловых величин эта формула имеет вид: $x=\operatorname{arctg} a+180°n$, $n\in\mathbf{Z}$ и $\operatorname{arctg} a$ выражен в градусах.

Для решения уравнения $\operatorname{tg} x=a$ важно также иметь в виду, что $\operatorname{arctg}(-a)=-\operatorname{arctg} a$. Это равенство следует из симметричности графика функции $y=\operatorname{tg} x$ на промежутке $]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}[$ относительно начала координат (рис. 169): $x_1=-x_0$. Например:

$$\operatorname{arctg}(-1)=-\operatorname{arctg} 1=-\frac{\pi}{4};$$

$$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\operatorname{arctg}\sqrt{3}=-\frac{\pi}{3}.$$

Пример 5. Решите уравнение $\operatorname{tg} x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение. $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{\pi}{6}$;

$$x=-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Задание 5. Найдите: а) $\operatorname{arctg} 1$; б) $\operatorname{arctg}(-3{,}7)$.

Задание 6. Решите уравнения:

а) $\operatorname{tg} x=0$; б) $\operatorname{tg} x=-1$; в) $\operatorname{tg} x=2{,}1$.

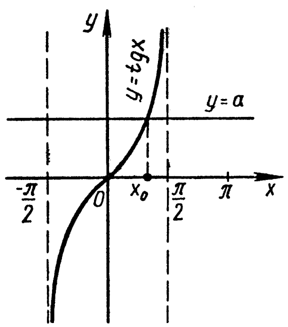


Рис. 168

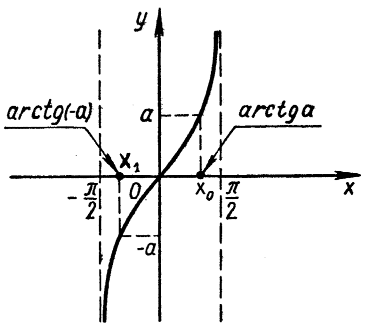


Рис. 169

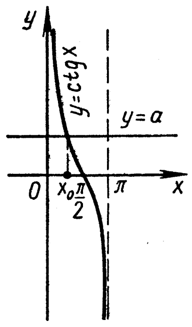


Рис. 170

▶ Функция $y=\operatorname{tg} x$ на промежутке $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$ возрастает и непрерывна, в силу этого она принимает все свои числовые значения из промежутка $]-\infty;\ \infty[$. Поэтому на множестве действительных чисел существует обратная тангенсу функция, которую называют арктангенс и обозначают $\operatorname{arctg} x$. График функции $y=\operatorname{arctg} x$ изобразите самостоятельно; он симметричен графику функции $y=\operatorname{tg} x$ относительно прямой $y=x$. Областью определения функции $y=\operatorname{arctg} x$ служит множество действительных чисел, а множеством значений — промежуток $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$; это возрастающая функция. ◀

Уравнение $\operatorname{ctg} x=a$ имеет решение при любом значении a, так как множеством значений функции $y=\operatorname{ctg} x$ является множество всех действительных чисел. На промежутке $]0;\ \pi[$ уравнение $\operatorname{ctg} x=a$ имеет только одно решение x_0 (рис. 170). Графически x_0 — это абсцисса точки пересечения котангенсоиды $y=\operatorname{ctg} x$ и прямой $y=a$ на промежутке $]0;\ \pi[$. Функция $y=\operatorname{ctg} x$ на этом промежутке убывает от $+\infty$ до $-\infty$, т. е. принимает все свои значения, причем каждое из них только один раз.

Решение x_0 уравнения $\operatorname{ctg} x=a$, взятое из промежутка $]0;\ \pi[$, называют главным, его обозначают $\operatorname{arcctg} a$ (читают: «арккотангенс a»); $x_0=\operatorname{arcctg} a$ — угловая величина дуги, котангенс которой равен a. В силу периодичности функции $y=\operatorname{ctg} x$ (с периодом π) стандартная формула для множества решений уравнения $\operatorname{ctg} x=a$ имеет вид:

$$x=\operatorname{arcctg} a+\pi n, \text{ где } n\in\mathbf{Z}.$$

В градусной системе измерения угловых величин эта формула имеет вид: $x=\operatorname{arcctg} a+180°n$, где $n\in\mathbf{Z}$ и $\operatorname{arcctg} a$ выражен в градусах.

Для решения уравнения $\operatorname{ctg} x=a$ важно также иметь в виду, что $\operatorname{arcctg}(-a)=\pi-\operatorname{arcctg} a$.

Например:

$$\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})=\pi-\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6};$$

$$\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Пример 6. Решите уравнение $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение. $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pi - \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$,

$$x = \frac{2}{3}\pi + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Задание 7. Найдите: а) $\operatorname{arcctg} 1$; б) $\operatorname{arcctg}(-2{,}31)$.

Задание 8. Решите уравнения:

а) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$; б) $\operatorname{ctg} x = 0$; в) $\operatorname{ctg} x = -1{,}73$.

Приведем сводную таблицу стандартных формул решений простейших тригонометрических уравнений на множестве действительных чисел:

Уравнение	Формула решений	Примечания
$\sin x = a$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$	$\arcsin(-a) = -\arcsin a$, $\lvert a\rvert \leqslant 1$, $n \in \boldsymbol{Z}$
$\cos x = a$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n$	$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$, $\lvert a\rvert \leqslant 1$, $n \in \boldsymbol{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$	$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$, $a \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$	$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$, $a \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{Z}$

Задание 9. Найдите множество значений аргумента, при которых функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ принимают наибольшее и наименьшее значения.

Ответы: а) $\sin x = 1$, если $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\sin x = -1$, если $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

в) $\cos x = 1$, если $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

г) $\cos x = -1$, если $x = \pi(2n+1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Упражнения

1. Выпишите формулы решений тригонометрических уравнений.

2. Найдите нули функций:

а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$; в) $y = \operatorname{tg} x$; г) $y = \operatorname{ctg} x$.

Примечание. Нулем функции называют значение аргумента, при котором значение функции равно нулю.

3. Найдите:

а) $\arcsin(-0{,}8)$; б) $\arccos(-0{,}4)$; в) $\operatorname{arctg}(-3{,}2)$; г) $\operatorname{arcctg}(-1{,}3)$.

4. Найдите значения аргумента, при которых значение функции $y = \operatorname{tg} x$ равно 3.

5. Решите уравнения:

а) $\sin x = -0{,}3$; б) $\cos x = 0{,}3$; в) $\operatorname{tg} x = 2{,}4$; г) $\operatorname{ctg} x = -0{,}89$.

6. Решите графически уравнения:

а) $\sin x = \frac{1}{2}x$; б) $\cos x = -x$.

§ 53. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В § 45 было показано, как решаются простейшие тригонометрические уравнения на промежутке $[0;\ 2\pi]$. В § 52 были решены такие уравнения на множестве действительных чисел. Сейчас мы продолжим рассмотрение примеров решения тригонометрических уравнений.

Пример 1. Решите уравнение $\sin 3x = -1$.

Решение. Воспользуемся формулой решения уравнения $\sin x = -1$ (см. задание 9 в предыдущем параграфе), получим: $3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, откуда $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Задание 1. Решите уравнения:

а) $\sin 3x = \frac{1}{2}$; б) $\cos 3x + 1 = 0$; в) $\operatorname{tg} 2x = -1$.

Пример 2. Решите уравнение $2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3} = 0$.

Решение. $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Воспользуемся формулой решения уравнения $\cos x = a$ (см. предыдущий параграф), получим: $x - \frac{\pi}{6} = \pm \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Так как $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, то $x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$. Откуда $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n$. Полученное множество решений можно также записать в виде двух множеств: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ или $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Задание 2. Решите уравнения:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$; б) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$;

в) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$.

Пример 3. Решите уравнение $2\sin^2 3x = 5\sin 3x - 2$.

Решение. Замечаем, что данное уравнение представляет собой квадратное уравнение относительно $\sin 3x$. Если $\sin 3x$ обозначить буквой y, то данное уравнение примет вид: $2y^2 = 5y - 2$, $2y^2 - 5y + 2 = 0$. Откуда $y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4}$, $y_1 = 2$, $y_2 = \frac{1}{2}$.

Таким образом, данное уравнение равносильно объединению двух тригонометрических уравнений:

а) $\sin 3x = 2$, это уравнение решений не имеет, так как $|\sin x| \leqslant 1$.

б) $\sin 3x = \frac{1}{2}$, откуда $3x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Найдем x: $3x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Задание 3. Решите уравнения:

а) $2\cos^2 x + \sqrt{2}\cos x = 0$; б) $2\sin^2 x - \sin x = 0$;

в) $\cos^2 x = 2 - \cos x$.

Пример 4. Решите уравнение $2\sin^2 x = 3\cos x$.

Решение. Данное уравнение содержит различные тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$. Воспользовавшись формулой (3) (см. § 46), мы можем выразить $\sin^2 x$ через $\cos^2 x$: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Получим: $2(1 - \cos^2 x) = 3\cos x$, $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$. Последнее уравнение является квадратным относительно $\cos x$. Так как его дискриминант $D = 9 + 16 = 25 > 0$, то уравнение имеет два корня: $\cos x = \frac{-3-5}{4} = -2$ или $\cos x = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$.

Таким образом, решением данного уравнения будет объединение решений двух простейших тригонометрических уравнений:

а) $\cos x = -2$, это уравнение решений не имеет, так как $|\cos x| \leqslant 1$;

б) $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, т. е. $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Задание 4. Решите уравнения:

а) $\sin^2 x = \cos^2 x - 1$; б) $1 + \operatorname{tg} x - \sin^2 x = \cos^2 x$.

Пример 5. Решите уравнение $1 + \sin x \cdot \cos x = \sin x + \cos x$.

Решение. Как и в рассмотренном выше примере 4, данное уравнение содержит разные тригонометрические функции. Но при замене одной из функций через другую получается сложное уравнение, содержащее радикалы, так как, например, $\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$. Поэтому поступим в данном случае иначе. Перенесем все члены уравнения в его левую часть и попытаемся разложить ее на множители:

$$1 + \sin x \cdot \cos x - \sin x - \cos x = 0,$$
$$(1 - \sin x) + (-\cos x + \sin x \cdot \cos x) = 0,$$
$$(1 - \sin x) - \cos x(1 - \sin x) = 0,$$
$$(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0.$$

Как видим, в данном случае это удалось. Решение уравнения теперь можно свести к решению двух простейших тригонометрических уравнений:

а) $1 - \sin x = 0$, $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

б) $1 - \cos x = 0$, $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Как видно из рассмотрения примера 5, если левая часть уравнения есть произведение нескольких функций, а правая часть равна нулю, то решением этого уравнения будут все значения переменной, обращающие в нуль хотя бы один из сомножителей, причем эти значения переменной должны принадлежать области определения функции, стоящей в левой части уравнения.

Пример 6. Решите уравнение $(1 - \sin x)\operatorname{tg} x = 0$.

Решение. Решением данного уравнения будет объединение множеств решений двух уравнений:

а) $1 - \sin x = 0$, $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

б) $\operatorname{tg} x = 0$, $x = \operatorname{arctg} 0 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Замечаем, что корни первого уравнения $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, обращают в нуль первый множитель $1 - \sin x$ данного уравнения, однако эти значения переменной не принадлежат области определения второго множителя $\operatorname{tg} x$ (при этих значениях переменной $\operatorname{tg} x$ теряет смысл). Поэтому числа $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ не являются решениями данного уравнения.

Ответ: πk, $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 7. Решите уравнение $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = \cos x$.

Решение. Так как $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1$ при $x \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ (см. формулу 4 из § 46), то $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Однако эти значения переменной не принадлежат области определения функции $\operatorname{ctg} x$ (в этих точках эта функция теряет смысл). Поэтому данное уравнение решений не имеет.

Ответ: $\varnothing$.

Задание 5. Решите уравнение:

а) $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = \sin x$; б) $\sin x \operatorname{ctg} 2x = 0$;

в) $\sin x = \sin x \cos x$.

Упражнения

1. Решите уравнения:

а) $2\cos 4x = 1$; б) $3\sin 5x - 2 = 0$;

в) $4 - 3\operatorname{tg} x = 0$; г) $\operatorname{ctg} 4x = 5$.

2. Решите уравнения:

а) $\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$; б) $\operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = 3$;

в) $2\cos\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -1$.

3. Решите уравнения:

а) $\sin^2 x - \sin x = 0$; б) $\cos^2 x = \cos x + 2$;
в) $\mathrm{tg}^2 x = 4\,\mathrm{tg}\,x - 3$; г) $2\cos^2 2x = \cos 2x$;
д) $\sin^2 2x + 2 = 3\sin 2x$.

4. Упростите выражения:

а) $\dfrac{2\sin^2\alpha - 1}{\sin\alpha - \cos\alpha}$; б) $\cos\alpha(1 + \mathrm{tg}\,\alpha) - \sin\alpha(1 + \mathrm{ctg}\,\alpha)$;
в) $\dfrac{\sec^2\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \mathrm{tg}^2\alpha$; г) $(\mathrm{ctg}\,\alpha - \cos\alpha)\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + \mathrm{tg}\,\alpha\right)$.

5. Докажите тождества:

а) $(\mathrm{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha)\,\mathrm{ctg}^2\alpha = \sin^2\alpha$;
б) $(1 + \mathrm{ctg}^2\alpha)(1 - \sin^2\alpha) = \mathrm{ctg}^2\alpha$;
в) $\sqrt{(\sec^2\alpha - 1)(1 - \sin^2\alpha)} = |\sin\alpha|$;
г) $\mathrm{tg}^2\alpha - \sin^4\alpha - \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = \mathrm{tg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$.

6. Найдите области определения функций:

а) $y = \dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\sin x}$, б) $y = \dfrac{\mathrm{ctg}\,x}{\cos x}$.

7. Решите уравнения:

а) $\cos^2 x = \sin^2 x - 1$; б) $2\cos x + \cos^2 x = 2 - \sin^2 x$;
в) $\mathrm{ctg}\,x \sec x + 1 = 0$; г) $\mathrm{cosec}\,x\,\mathrm{tg}\,x + 1 = 0$.

8. Решите уравнения:

а) $\mathrm{tg}\,3x\,\mathrm{tg}\,2x\,\mathrm{tg}\,5x = 0$; б) $\sin^2 x + 1 = -2\sin x$;
в) $\sin x\cos x - 1 = \cos x - \sin x$; г) $\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{ctg}\,x + 3\,\mathrm{tg}\,x = \mathrm{ctg}\,x + 3$;
д) $\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\sin 3x} = 0$; е) $\dfrac{\sin 2x}{\mathrm{tg}\,x} = 0$.

§ 54. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

В § 45 было показано, как решаются простейшие тригонометрические неравенства на промежутке $[0;\ 2\pi]$ с помощью единичной окружности. Сейчас мы рассмотрим примеры решений тригонометрических неравенств на множестве действительных чисел.

Пример 1. Решите неравенство $\sin x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Решим это неравенство графически:

а) построим в одной и той же системе координат графики функций $y = \sin x$ и $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 171);

б) находим корни уравнения $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ на каком-либо промежутке длиной 2π (2π — период функции $y = \sin x$). Например на промежутке $[0;\ 2\pi]$ корнями этого уравнения будут числа $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$; на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ — числа $-\frac{5\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$; на промежутке $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right]$ — числа $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{9\pi}{4}$;

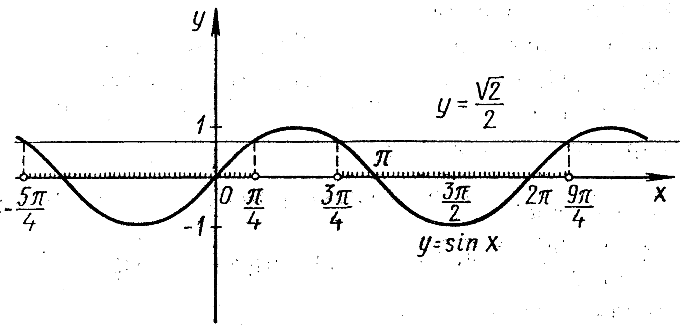


Рис. 171

в) на каком-либо промежутке длиной 2π находим решения данного неравенства. Например, если за промежуток длиной 2π выбрать отрезок $[0;\ 2\pi]$, то решением данного неравенства на этом отрезке будет объединение промежутков $\left]0;\ \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4};\ 2\pi\right[$; если за промежуток длиной 2π выбрать отрезок $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right]$, то решением данного неравенства на этом отрезке будет промежуток $\left]\frac{3\pi}{4};\ \frac{9\pi}{4}\right[$; если за промежуток длиной 2π выбрать отрезок $\left[-\frac{3\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, то решением данного неравенства на этом отрезке также будет промежуток $\left]-\frac{5\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right[$.

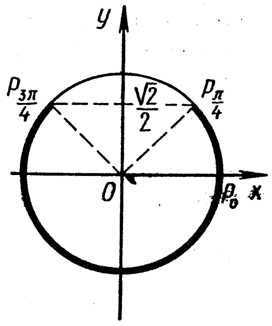


Рис. 172

Для нахождения одного из таких множеств решений можно воспользоваться и единичной окружностью, как мы поступили в § 45.

Из рисунка 172 видно, что на промежутке $[0;\ 2\pi]$ решением неравенства $\sin x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ будет объединение промежутков $\left]0;\ \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4};\ 2\pi\right[$;

г) выбираем любой из найденных промежутков (вид ответа будет проще,

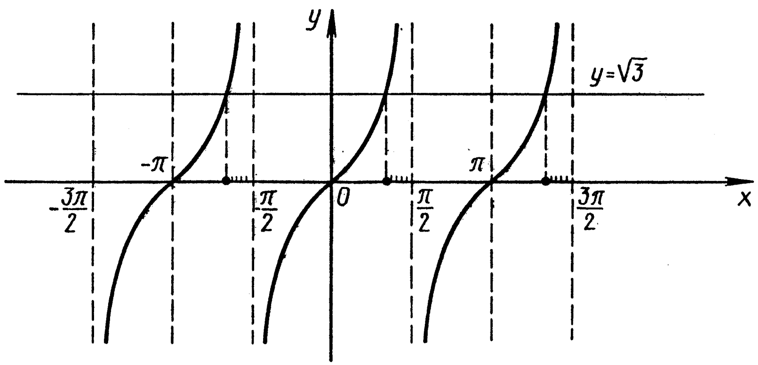


Рис. 173

если выбрать непрерывный промежуток) и, пользуясь периодичностью функции $y=\sin x$, записываем множество всех решений данного неравенства.

Если, например, в качестве одного из промежутков решений выбрать интервал $\left]-\frac{5\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right[$, то решением данного неравенства будет множество промежутков:

$$\left]-\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right[,\ n\in \mathbf{Z}.$$

Задание 1. Решите неравенства: а) $\sin x\leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x> -\frac{1}{2}$.

Пример 2. Решите неравенство $\operatorname{tg} x\geqslant \sqrt{3}$.

Решение. Решим неравенство графически: а) построим в одной системе координат графики функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\sqrt{3}$ (рис. 173);

б) находим корни уравнения $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$ на одном из промежутков длиной π (π — период функции $y=\operatorname{tg} x$). Например, на промежутке $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$, $x=\frac{\pi}{3}$;

в) на этом промежутке находим решения данного неравенства: $\left[\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right[$;

г) пользуясь периодичностью функции $y=\operatorname{tg} x$, записываем множество всех решений данного неравенства:

$$\left[\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right[,\ n\in \mathbf{Z}.$$

Задание 2. Решите неравенства:

а) $\operatorname{tg} x<\sqrt{3}$; б) $\operatorname{ctg} x\geqslant 1$.

Упражнения

1. Решите неравенства:

а) $\sin x>0$; б) $\sin x\leqslant 0$; в) $\cos x\geqslant 0$;

г) $\cos x<0$; д) $\operatorname{tg} x>0$; е) $\operatorname{ctg} x\leqslant 0$;

ж) $\sin x\leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; з) $\cos x\leqslant -\frac{1}{2}$; и) $\operatorname{ctg} x>-1$.

2.* Решите неравенства:

а) $\sin 2x<\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 1$;

в) $\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)<\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\leqslant 0$.

§ 55. ПОВТОРЕНИЕ

1. В равнобедренном треугольнике величина угла при основании равна 36° 42′. Найдите величины углов этого треугольника в радианах.

2. Найдите на единичной окружности образ точки P_0 (1; 0) при повороте R_O^{α}, если: а) $\alpha=\frac{\pi}{6}+2\pi n$; б) $\alpha=\frac{2}{3}\pi+2\pi n$; в) $\alpha=-\frac{\pi}{4}+2\pi n$; г) $\alpha=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, где $n\in \mathbf{Z}$.

3. С помощью таблиц найдите значения величин углов в градусах по заданным их значениям в радианах: а) 0,3274; б) 1,2513; в) 0,9153; г) 1,0213.

4. Найдите длину дуги окружности и площадь кругового сектора, если радиус окружности равен 10 см, а величина дуги равна: а) 60°; б) 50° 19′.

5. Сформулируйте определения тригонометрических функций числового аргумента. Пользуясь единичной окружностью, найдите значения функций $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$ и $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$.

6. Найдите значения синуса, косинуса и тангенса следующих чисел: а) 0,83; б) 1,31; в) 2,35; г) 3,12.

7. Известно, что $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найдите $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

8. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=-2$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

9. Какие функции называются четными? Приведите примеры четных функций. Докажите, что функция $f(x)=x^4\cos 2x$ четная.

10. Какие функции называются нечетными? Приведите примеры нечетных функций. Приведите примеры функций, не обладающих свойствами четности или нечетности. Докажите, что функция $f(x)=x^5+\sin 2x$ нечетная.

11. Установите знак произведения и частного:

а) $(-\operatorname{ctg}300°)\cdot\sin 300°$; б) $-\frac{\cos 320°}{\operatorname{tg}390°}$.

12. Вычислите:

а) $x^2\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)+y^2\cos^2 0+\operatorname{tg}\pi+2xy\sin\frac{3\pi}{2}$;

б) $2\sin 2\alpha+3\cos(3\alpha-180°)+\operatorname{ctg}(\alpha-75°)$ при $\alpha=45°$;

в) $a^2\sin 2\pi+b^2\operatorname{tg}0-2ab\cos\pi+b^2\cos(-\pi)$.

13. Какие функции называют периодическими? Какой наименьший положительный период имеют функции: а) $\sin x$; б) $\cos x$; в) $\operatorname{tg}x$; г) $\operatorname{ctg}x$?

14. Найдите наименьший положительный период функций:

а) $\sin 3x$; б) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; в) $\operatorname{tg}4x$.

15. Вычислите:

а) $\dfrac{4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)-2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{4\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)-2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{6}-1}$;

б) $\dfrac{\sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$;

в) $\dfrac{\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{6}$;

г)* $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 30°\cdot\sec(-60°)\cdot\operatorname{tg}45°}{\operatorname{cosec}^2(-45°)\operatorname{cosec}30°\cdot\sin 30°\cdot\cos^2(-45°)}$.

16. Запишите известные вам тригонометрические тождества. Укажите допустимые значения аргумента в каждом из этих тождеств.

17. Докажите тождества:

а) $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)=\operatorname{tg}^2\alpha$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\sin^2\alpha$;

в)* $\cos\alpha(\sec^2\alpha-1)=\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$; г) $\sin\alpha(\operatorname{cosec}^2\alpha-1)=\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$;

д)* $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}=\sqrt{\sec^2\alpha-1}\cdot\sin\alpha$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

е) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}+\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{2}{\sin\alpha}$.

18. Упростите выражения:

а) $\sin^4\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$;

б) $(1-\cos\alpha)^2+(1+\cos\alpha)^2-4\cos^2\alpha$;

в) $\dfrac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\cos\alpha\cdot\sin\alpha}$; г)* $\sqrt{(1-\operatorname{cosec}^2y)(\cos^2y-1)}$;

д) $\dfrac{a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta}{b\operatorname{ctg}\alpha+a\operatorname{ctg}\beta}$; е) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$.

19. Постройте графики функций:

а) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; б) $y=2\cos x$; в) $y=-2\sin x$;

г) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; д) $y=-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; е) $y=\operatorname{ctg}2x$.

20. Решите уравнения:

а) $\cos 2x=\frac{1}{2}$; б) $\sin 2x=-\frac{1}{2}$;

в) $\sin^2x-3\sin x=0$; г) $\dfrac{\sin x+1}{\operatorname{tg}x}=0$;

д) $\cos^2x-3\cos x+2=0$; е) $2\sin x+\cos^2x=2-\sin^2x$;

ж) $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x=\cos 2x$.

21. Найдите нули функций: а) $y=\cos\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)$;

б) $y=\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$.

22. Найдите область определения функций:

а) $y=\dfrac{\operatorname{ctg}2x}{\sin\frac{x}{3}}$; б) $y=\dfrac{\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$.

23. Решите неравенства:

а) $2\sin x>-1$; б) $2\cos x<-\sqrt{2}$;

в) $\operatorname{tg}x>2$; г) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}x<1$.

24. Решите графически уравнения:

а) $\sin x=x-1$; б) $\cos x=-x$; в) $|\sin x|=-x-1$.

§ 56. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Величины двух углов треугольника равны 25° и 53°. Найдите с помощью таблиц величины углов этого треугольника в радианах.

2. Найдите длину окружности, дуги и площадь сектора, если радиус окружности равен 100 см, а дуга содержит 0,86 рад.

3. Дано: $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$ и $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$. Найдите значения $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

4. Докажите, что функция $y=\dfrac{x^2+4}{\cos x}$ четная.

5. Найдите наименьший положительный период у функции
$$y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right).$$

6. Упростите выражения:

а) $(2\sin\alpha+3\cos\alpha)^2+(2\cos\alpha-3\sin\alpha)^2$; б) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$.

7. Докажите тождество $\dfrac{2-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}{1-2\cos^2\alpha}+\operatorname{tg}^2\alpha=-1$.

8. Решите уравнения:

а) $(1-\cos^2 x)\operatorname{tg}2x=0$; б) $\cos^2 x+\sin x+1=0$.

9. Найдите нули функции $y=\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)$.

10. Решите неравенство $-2\cos x>1$.

11. Постройте графики функций:

а) $y=-\sin 2x$; б) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Глава VI.

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

§ 57. ВЕКТОРЫ. СКАЛЯРНОЕ УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ (ПОВТОРЕНИЕ)

Из курса геометрии мы знакомы с понятием вектора, операциями сложения, вычитания векторов, умножения вектора на число, скалярным умножением векторов (повторите этот материал). Для дальнейшего изложения материала о тригонометрических функциях нам потребуются некоторые сведения о скалярном умножении векторов. Вспомним эти сведения.

Определение. **Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение числовых значений длин этих векторов на косинус угла между этими векторами.**

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 174) по определению может быть записано так: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$, где $\varphi=(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$, $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$.

При этом согласно определению, принятому в геометрии, углом между двумя векторами называют угол между направлениями этих векторов, т. е. $\varphi\in[0°;\ 180°]$.

Рассмотрим ненулевой вектор $\vec{a}$, отложенный от начала координат. Пусть $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — перпендикулярные единичные векторы, отложенные по осям от начала координат: $|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$, $\vec{i}\perp\vec{j}$. Тогда вектор может быть единственным образом разложен по неколлинеарным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$, т. е. существует единственная пара чисел x и y, таких, что $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

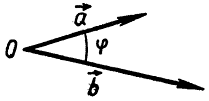


Рис. 174

Числа x и y называют прямоугольными координатами вектора $\vec{a}$. Вектор $\vec{a}$ с координатами x и y записывают так: $\vec{a}=(x;\ y)$.

Рассмотрим теперь два вектора $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$ и $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$, отложенные от начала координат. Пусть величина угла между ними равна φ (рис. 175). Разложим эти векторы по неколлинеарным единичным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$:

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j},\ \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}.$$

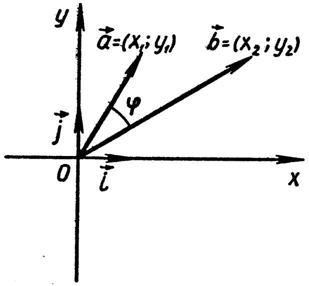


Рис. 175

Вычислим скалярное произведение этих векторов, воспользовавшись известными из геометрии свойствами умножения векторов ($\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0$, так как $\vec{i}\perp\vec{j}$, $\vec{i}^2=\vec{j}^2=1$):

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j})(x_2\vec{i}+y_2\vec{j})=$$
$$=x_1x_2\vec{i}^2+y_1x_2\vec{j}\vec{i}+x_1y_2\vec{i}\vec{j}+y_1y_2\vec{j}^2=x_1x_2+y_1y_2;$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2.$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

Упражнения

1. Сформулируйте определение скалярного произведения двух векторов.

2. Как определяется угол между двумя векторами?

3. Чему равно скалярное произведение двух векторов, заданных своими координатами?

4. Найдите $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если: а) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=7$, $\varphi=(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=60°$; б) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=4$, $\varphi=(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=120°$.

5. Вычислите $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если: а) $\vec{a}=(2;\ 3)$, $\vec{b}=(-1;\ 5)$; б) $\vec{a}=(-2;\ -3)$, $\vec{b}=(4;\ 2)$.

6. Заданные повороты R_O^{α} сведите к поворотам $R_O^{\alpha_1}$, где $0\leqslant\alpha_1\leqslant 2\pi$: а) $R_O^{8\pi}$; б) $R_O^{\frac{11\pi}{2}}$.

§ 58. КОСИНУС СУММЫ И КОСИНУС РАЗНОСТИ ДВУХ АРГУМЕНТОВ

Применим теперь известную нам формулу $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$, где x_1 и y_1 — координаты $\vec{a}$, x_2 и y_2 — координаты $\vec{b}$, к выводу косинуса суммы и разности двух аргументов.

Теорема. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$, ***где*** α ***и*** β ***— произвольные действительные числа.***

Доказательство. Рассмотрим единичную окружность (рис. 176) и два действительных числа α и β. Этим числам соответствуют точки P_α и P_β единичной окружности.

Найдем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OP_\alpha}$ и $\overrightarrow{OP_\beta}$, имея в виду, что величина угла между двумя векторами по определению принадлежит промежутку $[0;\ \pi]$ (см. рис. 176):

$$\overrightarrow{OP_\alpha}\cdot\overrightarrow{OP_\beta}=|\overrightarrow{OP_\alpha}|\cdot|\overrightarrow{OP_\beta}|\cdot\cos(\alpha-\beta)=1\cdot 1\cdot\cos(\alpha-\beta)=$$
$$=\cos(\alpha-\beta).$$

Запишем скалярное произведение этих векторов в координатах, учитывая, что $\overrightarrow{OP_\alpha}=(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$, а $\overrightarrow{OP_\beta}=(\cos\beta;\ \sin\beta)$:

$$\overrightarrow{OP_\alpha}\cdot\overrightarrow{OP_\beta}=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

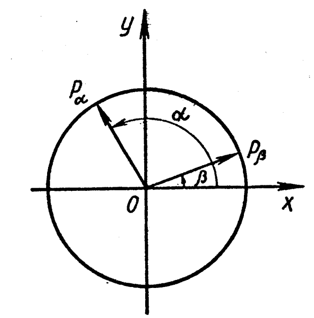


Рис. 176

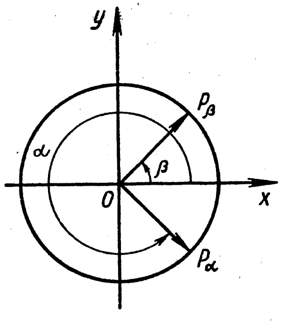


Рис. 177

Таким образом,

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \qquad (1)$$

Мы доказали справедливость этой формулы для случая, когда

$$(\alpha-\beta)\in[0;\ \pi].$$

Если же $\alpha-\beta\in[\pi;\ 2\pi]$ (рис. 177), то

$$\overrightarrow{OP_\alpha}\cdot\overrightarrow{OP_\beta}=\cos(2\pi-(\alpha-\beta))=\cos(\alpha-\beta).$$

Таким образом, формула (1) верна для всех чисел α и β, удовлетворяющих условию $(\alpha-\beta)\in[0;\ 2\pi]$.

В силу периодичности функций $\sin x$ и $\cos x$ с периодом 2π формула (1) верна для любых действительных значений α и β.

Следствие. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$ *для любых действительных чисел* α *и* β.

Доказательство.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)+\sin\alpha\cdot\sin(-\beta).$$

Так как $\cos(-\beta)=\cos\beta$, $\sin(-\beta)=-\sin\beta$, получаем:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta. \qquad (2)$$

Пример. Вычислите $\cos 75°$.

Решение. $75°$ можно представить в виде суммы $30°+45°$. Значения функций синуса и косинуса для $30°$ и $45°$ нам известны, поэтому, воспользовавшись формулой (2), получим:

$$\cos 75°=\cos(30°+45°)=\cos 30°\cos 45°-\sin 30°\sin 45°=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1).$$

Упражнения

1. Запишите доказательство теоремы и ее следствия из § 58 в символической форме.

2. Упростите выражения:

а) $\cos 5x \cdot \cos 2x + \sin 5x \cdot \sin 2x$;

б) $\cos 3\alpha \cdot \cos \alpha - \sin 3\alpha \cdot \sin \alpha$.

3. Вычислите:

а) $\cos 40^\circ \cos 20^\circ - \sin 20^\circ \sin 40^\circ$;

б) $\cos 70^\circ \cos 40^\circ + \sin 70^\circ \sin 40^\circ$;

в) $\cos \frac{\pi}{15} \cos \frac{\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{15} \sin \frac{\pi}{10}$;

г) $\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\pi}{12}$;

д) $(\cos 18^\circ \cos 27^\circ - \sin 18^\circ \sin 27^\circ) - 1$.

4. Вычислите: а) $\cos 105^\circ$; б) $\cos 15^\circ$.

5. Докажите, что $\cos \alpha + \cos(120^\circ + \alpha) + \cos(120^\circ - \alpha) = 0$.

6. Докажите, что $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$.

Указание. Сложите почленно равенства (1) и (2).

7. Докажите, что $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$.

Указание. Вычтите почленно из равенства (2) равенство (1).

8. Решите уравнения:

а) $\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = 1$;

б) $\cos 3x \cos x = \sin 3x \sin x - 0{,}5$;

в) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cos x + \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$.

§ 59. СИНУС СУММЫ И СИНУС РАЗНОСТИ ДВУХ АРГУМЕНТОВ

Теорема. ***Для любых действительных чисел α и β верны равенства:***

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha, \qquad (1)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha. \qquad (2)$$

Доказательство. Вначале докажем формулы $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \sin \gamma$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \cos \gamma$, известные из восьмого класса. В формуле $\cos(\alpha - \beta)$ (см. § 58) положим, что $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $\beta = \gamma$. Получим:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \gamma + \sin \frac{\pi}{2} \sin \gamma;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \sin \gamma.$$

Теперь, воспользовавшись последней формулой, получим:

$$\cos \gamma = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right);$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \cos \gamma.$$

Для доказательства теоремы воспользуемся формулой для $\cos(\alpha + \beta)$ (см. предыдущий параграф), двумя полученными формулами, а также свойствами четности косинуса и нечетности синуса:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta =$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha.$$

Формула (1) доказана.

Для доказательства формулы (2) представим $\alpha - \beta$ как $\alpha + (-\beta)$. Тогда

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) =$$

$$= \sin \alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin(-\beta) \cdot \cos \alpha =$$

$$= \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha.$$

Формула (2) доказана.

Пример. Вычислите $\sin 75^\circ$.

Решение. 75° можно представить в виде суммы $30^\circ + 45^\circ$. Значения функций синуса и косинуса для 30° и 45° нам известны, поэтому, воспользовавшись формулой (1), получим:

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ +$$

$$+ \cos 30^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1).$$

Упражнения

1. Упростите выражения:

а) $\cos \alpha \sin 5\alpha - \sin \alpha \cos 5\alpha$;

б) $\sin 3x \cos 2x + \sin 2x \cos 3x$;

в) $\sin(\alpha + \beta) - \cos \alpha \sin \beta$;

г) $\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta$;

д) $\sin \alpha \cos \beta - \sin(\alpha - \beta)$;

е) $\cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha - \beta)$;

ж) $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\sqrt{2}}$;

з) $\frac{\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha}{2}$.

2. Вычислите:

а) $\sin 20^\circ \cos 40^\circ + \sin 40^\circ \cos 20^\circ$;

б) $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 15^\circ - \frac{1}{2} \sin 15^\circ$;

в) $\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6}$;

г) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 75^\circ+\frac{1}{2}\sin 75^\circ$;

д) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{7}{24}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

е) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

ж) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$, если $\sin\alpha=-0{,}6$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

з) $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$, если $\sin\alpha=\frac{7}{25}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

3. **Вычислите, не пользуясь таблицами значений тригонометрических функций:**

а) $\sin 105^\circ$; б) $\cos 105^\circ$; в) $\sin 15^\circ$;
г) $\cos 15^\circ$; д) $\sin 15^\circ-\operatorname{tg}30^\circ\cos 15^\circ$;

е) $\sin(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha=\frac{5}{13}$, $\sin\beta=-0{,}6$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

4. Упростите выражения:

а) $\frac{\sin 38^\circ\cos 12^\circ+\cos(-38^\circ)\sin 12^\circ}{\cos 40^\circ\cos 10^\circ+\sin(-40^\circ)\sin 10^\circ}$;

б) $\frac{\cos 65^\circ\cos 40^\circ-\sin 65^\circ\sin(-40^\circ)}{\sin 17^\circ\cos 8^\circ+\cos 17^\circ\sin 8^\circ}$;

в) $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$;

г) $\cos(150^\circ-\alpha)-\cos(210^\circ+\alpha)$;

д) $\sin(\alpha+120^\circ)-\sin(60^\circ-\alpha)$;

е) $\sin 748^\circ-\cos 77^\circ\cos 213^\circ-\cos 13^\circ\sin 33^\circ$;

ж) $\cos(45^\circ-x)\cos x-\sin(45^\circ-x)\sin x$.

5. Докажите тождества:

а) $\sin(30^\circ+x)\cos x-\cos(30^\circ+x)\sin x=\frac{1}{2}$;

б) $\cos(60^\circ+\alpha)\cos\alpha+\sin(60^\circ+\alpha)\sin\alpha=\frac{1}{2}$;

в) $\sin(45^\circ-x)\cos x+\cos(45^\circ-x)\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$;

г) $\frac{0{,}5\sin 20^\circ-\cos\left(\frac{\pi}{6}-20^\circ\right)}{\sin 3^\circ\sin 17^\circ-\cos 3^\circ\cos 17^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

д) $\frac{\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)}{2\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}=\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta$;

е) $\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cos^3\beta-\cos\alpha\sin^3\beta=\sin\beta\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha-\beta)$.

6. Докажите, что

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

Указание. Сложите почленно равенства (1) и (2), приведенные в рассматриваемом параграфе.

7. Решите уравнения:

а) $\sin\left(x-\frac{4\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{4\pi}{3}-x\right)$;

б) $\sin\left(\frac{7\pi}{4}+x\right)+\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=0$;

в) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1$;

г) $3\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sin x$;

д) $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin x$;

е) $\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\cos x$.

§ 60. ТАНГЕНС СУММЫ И ТАНГЕНС РАЗНОСТИ ДВУХ АРГУМЕНТОВ

Выведем формулы для $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, пользуясь соответствующими формулами для синуса и косинуса, а также определением тангенса ($\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cos\alpha\neq 0$).

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta},$$

где $\cos(\alpha+\beta)\neq 0$, т. е. $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Разделим числитель и знаменатель полученного выражения на произведение $\cos\alpha\cos\beta\neq 0$, чтобы в окончательном виде формула выражала тангенс суммы через тангенсы заданных чисел α и β:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Получили:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \qquad (1)$$

где α, β, $\alpha+\beta$ не являются числами вида $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Задание. Докажите, что

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

где α, β, $\alpha-\beta$ не являются числами вида $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Указание. $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}(\alpha+(-\beta))$, затем воспользуйтесь формулой (1) и свойством нечетности тангенса.

Упражнения

1. Упростите выражения:

а) $\frac{\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}3x}{1-\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x}$; б) $\frac{\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}2x}{1+\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x}$;

в) $\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$;

д) $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}-\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$;

е) $\dfrac{\cos\frac{5\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{5\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{3}}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)}$;

ж) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$;

з) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{15}+\operatorname{tg}\frac{4\pi}{15}}{1+\operatorname{tg}\frac{14\pi}{15}\cdot\operatorname{tg}\frac{4\pi}{15}}$; и) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}+\operatorname{tg}\frac{5\pi}{36}}{1+\operatorname{tg}\frac{8\pi}{9}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{36}}$.

2. Вычислите без таблиц: а) $\operatorname{tg}15°$; б) $\operatorname{tg}75°$; в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{3}$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$, если $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; д) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=-\frac{40}{41}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{9}{40}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

3. Докажите:

а) $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}$, где α, β, $\alpha+\beta$ не являются числами вида πk, $k\in \boldsymbol{Z}$;

б) $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}$, где α, β, $\alpha-\beta$ не являются числами вида πk, $k\in \boldsymbol{Z}$.

4. Докажите тождества:

а) $\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}\beta}=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$; б) $\frac{3-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+3\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$;

в) $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)}-\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\sin\alpha$, где $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

г)* $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha}-1+\cos\alpha+\frac{\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha}=\cos\alpha\operatorname{cosec}^2\alpha$.

5. Решите уравнения:

а) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}$; б) $\operatorname{tg}^2x-5\sec x+7=0$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\sqrt{3}$; г) $2\sec^2x-3\operatorname{tg}^2x=1$;

д) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1}{1-\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}=1$; е) $\cos x=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$.

§ 61. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Найдем значение $\sin 237°$. Таблицы VIII, IX, X «Четырехзначных математических таблиц» В. М. Брадиса позволяют находить значения тригонометрических функций, если значение аргумента задано в градусах от 0° до 90°. Поэтому, чтобы найти значения тригонометрических функций произвольного аргумента, надо научиться выражать значение этой функции через значение какой-либо тригонометрической функции аргумента, принадлежащего промежутку от 0° до 90°. Можно, например, воспользоваться формулой $\sin(\alpha+\beta)$, предварительно представив 237° как сумму 180° + 57°. Так мы и поступим:

$$\sin 237°=\sin(180°+57°)=\sin 180°\cos 57°+\cos 180°\sin 57°=$$
$$=0\cdot\cos 57°+(-1)\sin 57°=-\sin 57°\approx-0{,}84.$$

Поступая аналогичным образом, мы можем с помощью формул $\sin(\alpha\pm\beta)$, $\cos(\alpha\pm\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)$, $\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)$ вывести формулы, выражающие значения тригонометрических функций произвольного аргумента через значения тригонометрических функций аргумента, принадлежащего числовому промежутку от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Такие формулы называют формулами приведения.

В качестве примера приведем вывод одной группы таких формул. Пусть необходимо выразить $\cos\gamma$, где γ — любое число, через одну из тригонометрических функций некоторого числа α

из промежутка $]0;\ \frac{\pi}{2}[$. Число γ можно представить в виде $\gamma = \frac{\pi}{2}\cdot n \pm \alpha$, где $\alpha \in\ ]0;\ \frac{\pi}{2}[$, $n \in \mathbf{Z}$. Например, $5{,}7\pi = \frac{11\pi}{2} + 0{,}2\pi$; $5{,}3\pi = 11\cdot\frac{\pi}{2} - 0{,}2\pi$.

Воспользуемся формулами $\cos(\alpha \pm \beta)$:

$$\cos\gamma = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n \pm \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}n\cos\alpha \mp \sin\frac{\pi}{2}n\cdot\sin\alpha.$$

Заметим, что $\cos\frac{\pi}{2}\cdot n$ и $\sin\frac{\pi}{2}\cdot n$ принимают значения: 0; 1 или -1. Поэтому

$$\cos\gamma = \cos\left(\frac{\pi}{2}n \pm \alpha\right) = \begin{cases} \cos\alpha \text{ или } -\cos\alpha, \text{ если } n \text{ четное}, \\ \sin\alpha \text{ или } -\sin\alpha, \text{ если } n \text{ нечетное}. \end{cases}$$

При этом знак значения приведенной функции совпадает со знаком значения приводимой функции.

Аналогично доказывается следующая группа формул приведения для любого числа γ, $\alpha \in\ ]0;\ \frac{\pi}{2}[$ и $n \in \mathbf{Z}$:

$$\sin\gamma = \sin\left(\frac{\pi}{2}n \pm \alpha\right) = \begin{cases} \sin\alpha \text{ или } -\sin\alpha, \text{ если } n \text{ четное}, \\ \cos\alpha \text{ или } -\cos\alpha, \text{ если } n \text{ нечетное}; \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}n \pm \alpha\right) = \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha \text{ или } -\operatorname{tg}\alpha, \text{ если } n \text{ четное}, \\ \operatorname{ctg}\alpha \text{ или } -\operatorname{ctg}\alpha, \text{ если } n \text{ нечетное}; \end{cases}$$

$$\operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}n \pm \alpha\right) = \begin{cases} \operatorname{ctg}\alpha \text{ или } -\operatorname{ctg}\alpha, \text{ если } n \text{ четное}, \\ \operatorname{tg}\alpha \text{ или } -\operatorname{tg}\alpha, \text{ если } n \text{ нечетное}. \end{cases}$$

Принимая во внимание, что число 2π есть один из периодов для каждой из тригонометрических функций, можно ограничиться лишь значениями n, равными 1, 2, 3 или 4. Остаток от вычитания из числа γ возможного числа периодов 2π может быть представлен в одном из следующих видов: $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} + \alpha$, $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$, $\frac{3\pi}{2} - \alpha$, $\frac{3\pi}{2} + \alpha$, $2\pi - \alpha$. Поэтому формулы приведения можно представить в виде таблицы:

Функция	Аргумент						
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin\gamma$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\gamma$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\gamma$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\gamma$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

Задание 1. Докажите, что $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$.

Задание 2. Докажите, что $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$.

Задание 3. Докажите, что $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$.

Задание 4. Докажите, что $\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Для лучшего запоминания формул приведения можно воспользоваться мнемоническим правилом. Пусть γ и α — угловые величины дуг единичной окружности, причем $\gamma \in\ ]0;\ 2\pi[$, $\alpha \in\ ]0;\ \frac{\pi}{2}[$. Для того чтобы привести тригонометрическую функцию числа γ к тригонометрической функции числа α, необходимо:

1) величину γ представить в одном из следующих видов: $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi - \alpha$;

2) сохранить наименование функции, если дуга величиной α откладывается от горизонтального диаметра ($\pi \pm \alpha$, $2\pi - \alpha$); изменить наименование функции на кофункцию [1], если дуга величиной α откладывается от вертикального диаметра $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha;\ \frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$;

3) установить, в какой четверти расположен конец дуги величиной γ, и определить знак приводимой тригонометрической функции; этот же знак поставить перед значением приведенной функции.

Пример 1. Найдите $\operatorname{tg}\frac{37\pi}{4}$.

Решение. Функция $\operatorname{tg}x$ периодическая с периодом π, поэтому

$$\operatorname{tg}\frac{37\pi}{4} = \operatorname{tg}9\frac{1}{4}\cdot\pi = \operatorname{tg}\left(9\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \text{ (рис. 178)}.$$

Пример 2. Найдите $\cos\frac{14\pi}{3}$.

Решение.

$$\cos\frac{14\pi}{3} = \cos\left(4\pi + \frac{2}{3}\pi\right) = \cos\frac{2}{3}\pi =$$
$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

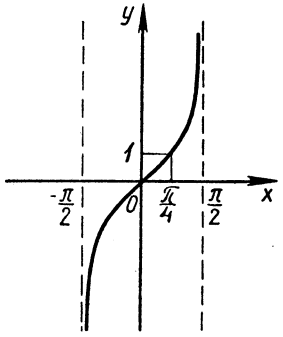


Рис. 178

Упражнения

1. Найдите значения: а) $\sin 150°$; б) $\cos 210°$; в) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}$.

---

[1] Синус на косинус, тангенс на котангенс и обратно.

2. Вычислите: а) $\sin 751°17'$; б) $\cos 1205°24'$; в) $\mathrm{tg}(-420°17')$; г) $\mathrm{ctg}\,571°37'$.

3. Вычислите:

а) $2\cos 600° + \sin 300° \cdot \mathrm{ctg}\,510°$; б) $\sin 690°\,\mathrm{ctg}\,1200° - \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,750°$;

в) $\frac{1}{2}\mathrm{tg}(-870°) \cdot \cos 330°$; г) $\cos(-1230°) \cdot \mathrm{ctg}\,1050°$;

д) $\sin(-1920°)\,\mathrm{tg}\,60° - \cos 1020°$; е) $\frac{1}{2}\sin 300° \cdot \mathrm{tg}(-690°)$;

ж) $\frac{1}{4}\cos(-330°) \cdot \mathrm{tg}\,690°$; з) $\mathrm{ctg}\,1200° \sin 690° + \frac{1}{2}\mathrm{tg}(-750°)$.

4. Докажите, что:

а) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \sin\alpha$; б) $\mathrm{tg}(2\pi - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$;

в) $\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{tg}\,\alpha$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$.

5. Найдите:

а) $\sin(\pi - 3) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 3\right)$; б) $\sin(-240°) - \cos(-150°)$;

в) $\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{9\pi}{8} + \sin^2 5\pi$; г) $\sin^2 402° + \sin^2 48° + \mathrm{tg}^2 225°$;

д) $\sin^2 99° + \cos^2 81° + \mathrm{ctg}^2 315°$; е) $\frac{\cos^2(-135°) + \sin^2(-300°)}{\mathrm{tg}(-225°) + \cos(-240°)}$;

ж) $\frac{6\cos^2(-240°) \cdot \mathrm{ctg}\,210°}{\sin(-300°) \cdot \cos^2 180°}$; з) $\frac{\sin^2 315° \cos 300° + \mathrm{tg}(-315°)}{\sin(-120°)\cos 150°}$.

6. Упростите выражения:

а) $\cos(\alpha - 90°)\,\mathrm{ctg}(180° + \alpha) - \cos(-\alpha)$;
б) $\sin(\alpha - 270°)\,\mathrm{tg}(180° - \alpha) + \sin(-\alpha)$;
в) $\mathrm{cosec}\,402° \sec 408° + \mathrm{tg}(-225°)$;
г) $\sec^2 40° + \mathrm{tg}(-225°)$;
д) $-2\cos 240° - \mathrm{tg}\,150° \sin(-120°) - \sin 270°$;
е) $\cos 45° \sin 3105° + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}(-315°) - \cos 270°$;
ж) $\cos 686° \sec 34° + \cos 18° \sin(-72°)$;
з) $8\cos 330°\,\mathrm{tg}\,210° - 4\,\mathrm{ctg}\,945°$.

7. Упростите:

а) $1 - \cos(\pi - \alpha)\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

б) $\frac{\mathrm{tg}(-660°)\sin(-870°)}{\cos(-600°) \cdot \mathrm{ctg}\,225°}$;

в) $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\mathrm{cosec}\,\beta - \mathrm{tg}^2\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)\sin(\pi - \beta)$;

г) $\mathrm{ctg}(270° + \alpha) + \mathrm{ctg}(\alpha - 270°)$;

д) $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\sin(2\pi - \alpha)$;

е) $\frac{\cos(\pi - \alpha)\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right)}{\sin(\pi + \beta)\cos(4\pi - \alpha)}$;

ж) $\sin^2 2(\pi + 1) + \cos^2(2\pi - 2)$;

з) $\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{2} - 6\alpha\right) + \sin(\pi + 4\alpha) + \sin(3\pi - 4\alpha)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2} + 6\alpha\right) + \cos(4\alpha - 2\pi) + \cos(4\alpha + \pi)}$.

8. Докажите тождества:

а) $\frac{\cos\left(\frac{9\pi}{2} - \alpha\right)}{\mathrm{ctg}(-\alpha)} = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\mathrm{tg}^2(\pi - \alpha)$;

б) $\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)}{\mathrm{tg}(-\alpha)} = \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)\mathrm{ctg}^2\alpha$;

в) $\sin^2(\pi - \alpha) - \sin^2(\alpha - 2\pi) = \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

9. Решите уравнения:

а) $5\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 8\cos(\pi + x) = 0$;

б) $3\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 7\sin(2\pi - x) = 0$;

в) $\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \cos(2\pi - x) + 2$;

г) $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}^2(8\pi + x) + \mathrm{tg}(3{,}5\pi - x) = 0$;

д) $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 3\cos(4\pi + x) = 4$;

е) $3\,\mathrm{tg}^2(13\pi + x) + \sqrt{3}\,\mathrm{ctg}(6{,}5\pi - x) = 0$;

ж) $2\cos(3{,}5\pi + x)\,\mathrm{tg}(8\pi - x) = 0$;

з) $2\cos^2(6\pi - x) - \sin(5{,}5\pi + x) = 1$.

§ 62. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ДВОЙНОГО АРГУМЕНТА

Если в формулах сложения тригонометрических функций $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ и $\mathrm{tg}(\alpha + \beta)$ (см. §§ 58—60) положить $\alpha = \beta$, то получим формулы, выражающие тригонометрические функции двойного аргумента 2α через функции аргумента α.

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (1)$$
$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) верны для любых действительных значений α.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (3)$$

Последняя формула имеет место при $2\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, т. е. при $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in\mathbf{Z}$, а также при $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Пример. Выразите $\sin 3\alpha$ через $\sin\alpha$.

Решение.

$$\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha=$$
$$=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\sin\alpha=$$
$$=2\sin\alpha\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha=$$
$$=3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha=3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)-\sin^3\alpha=$$
$$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.$$

Упражнения

1. Применяя формулы (1), (2) и (3), выразите $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg}x$ через тригонометрические функции аргумента $\frac{x}{2}$.

2. Вычислите: а) $\sin 15^\circ\cos 15^\circ$; б) $\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ$.

3. Выразите: а) $\cos 3\alpha$ через $\cos\alpha$; б) $\sin 4\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

4. Вычислите: а) $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; б) $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=-0{,}6$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

5. Упростите выражения:

а) $\frac{\sin 2x}{2\cos x}$; б) $\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}$;

в) $\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}$; г) $1+\cos 2x+2\sin^2 x$;

д) $2\sin^2 x-1$; е) $\sin^2 x+\cos^4 x-\frac{3}{4}$;

ж) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; з) $\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$.

6. Упростите выражения:

а) $2\cos^2\alpha-1$; б) $\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos 2\alpha$;

в) $\cos^4 2\alpha-\sin^4 2\alpha$; г) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$;

д) $\cos^2\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$; е) $1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

ж) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}$; з) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha$.

7. Докажите тождества:

а) $4\sin\alpha\cos^3\alpha-2\sin 2\alpha\sin^2\alpha=\sin 4\alpha$;

б) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\sin 2\alpha$.

8. Решите уравнения:

а) $\sin x=\sin 2x$; б) $4\sin x\cos x=\sqrt{3}$;

в) $4\sin^4 x+\sin^2 2x=2$; г) $\operatorname{tg}2x=3\operatorname{tg}x$;

д) $\sin^4 x-\cos^4 x=0{,}5$; е) $\sin^2 2x-4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+4=0$.

§ 63. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА

Выведем формулы, позволяющие выражать тригонометрические функции аргумента $\frac{\alpha}{2}$ через тригонометрические функции аргумента α.

Положим в формуле, выражающей косинус двойного аргумента, $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$, $x=\frac{\alpha}{2}$. Получим:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha. \qquad (*)$$

Для нахождения выражений для $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\sin\frac{\alpha}{2}$ необходимо еще одно соотношение, связывающее эти величины. Таким выражением может служить известное тождество

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1. \qquad (**)$$

Вычтем почленно из равенства $(**)$ равенство $(*)$, получим:

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha,$$

откуда найдем:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2},$$

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}. \qquad (1)$$

Сложим почленно равенства (**) и (*), получим:

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha,$$

откуда найдем:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2},$$

или

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) позволяют находить значения $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$. Для этого необходимо иметь некоторые дополнительные сведения об аргументе α.

Воспользовавшись определениями функций $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{ctg}x$ и формулами (1) и (2), получим:

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \qquad (3)$$

$$\left|\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}. \qquad (4)$$

Функции $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ могут быть более просто выражены через тригонометрические функции аргумента α. По определению

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}, \text{ где } \cos\frac{\alpha}{2}\neq 0. \qquad (***)$$

Умножим числитель и знаменатель последней дроби на $2\sin\frac{\alpha}{2}$, получим:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, \text{ где } \sin\alpha\neq 0.$$

Умножив числитель и знаменатель формулы (***) на $2\cos\frac{\alpha}{2}$, получим другую формулу для $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}, \text{ где } 1+\cos\alpha\neq 0.$$

Воспользовавшись известным соотношением $\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x}$, где $\operatorname{tg}x\neq 0$, получим две аналогичные формулы для $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}, \text{ где } 1-\cos\alpha\neq 0;$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}, \text{ где } \sin\alpha\neq 0.$$

Пример 1. Найдите без таблиц $\operatorname{tg}22^\circ30'$.

Решение. Воспользуемся формулой (3), имея в виду, что $\operatorname{tg}22^\circ30'>0$.

$$\operatorname{tg}22^\circ30'=\sqrt{\frac{1-\cos45^\circ}{1+\cos45^\circ}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{4-2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}-1=\sqrt{2}-1\approx 0{,}41.$$

Пример 2. Решите уравнение

$$4\sin^2x(1+\cos2x)=1-\cos2x.$$

Решение. В данном уравнении содержатся тригонометрические функции от аргументов x и $2x$. Выразим функции аргумента $2x$ через функции аргумента x. Воспользуемся формулами

$$1+\cos2x=2\cos^2x,\quad 1-\cos2x=2\sin^2x.$$

Данное уравнение примет вид: $4\sin^2x\cdot2\cos^2x=2\sin^2x$, или $2\sin^2x(4\cos^2x-1)=0$, откуда:

а) $\sin x=0$, $x=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$;

б) $4\cos^2x-1=0$, $2(2\cos^2x)-1=0$, $2(1+\cos2x)-1=0$;

$$\cos2x=-\frac{1}{2},\quad 2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\quad x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\quad n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: πn; $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Упражнения

1. Найдите:

а) $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

б) $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$, $\frac{5\pi}{2}<\alpha<3\pi$;

в) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

г) $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha=-0{,}8$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

2. Упростите выражение:

а) $\dfrac{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}$; б) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\alpha}{2}\right)-1$;

в) $\cos^4 x-\sin^4 x-\cos 2x$; г) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\alpha}{2}\right)-1$;

д) $\dfrac{1+\cos 42^\circ}{1-\sin 48^\circ}$; е) $\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\cdot \mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\alpha$;

ж) $\dfrac{1-2\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha}{1+2\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha}$; з) $\dfrac{1-2\sin\frac{x}{2}-\cos x}{1+2\sin\frac{x}{2}-\cos x}$.

3. Решите уравнения:

а) $2\cos^2(x-\pi)+3\sin(\pi+2x)=0$;

б) $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+5\cos(1{,}5\pi-2x)=0$;

в) $2\cos^2(2\pi-x)=3\sin(\pi-x)+2$;

г) $1-\sin x=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$;

д) $1+\sin x=\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$;

е) $\sin^2 x-\cos^2 x=\cos^2 2x$.

§ 64 *. ВЫРАЖЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЧЕРЕЗ ТАНГЕНС ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА

В § 46 мы видели, что каждую из тригонометрических функций можно выразить через любую другую тригонометрическую функцию того же аргумента. Некоторые из таких выражений содержат квадратные корни, поэтому их применение, например, при решении уравнений приводит к иррациональным уравнениям. Однако удобнее выражать тригонометрические функции рационально (только с помощью действий сложения, вычитания, умножения и деления) через другие тригонометрические функции.

Сейчас мы выведем формулы, позволяющие выражать функции $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}\, x$ через $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

Пример 1. Выразите $\sin x$ через $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

Решение. Две известные формулы $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ и $\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=1$ позволяют выразить $\sin x$ через $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$:

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}.$$

Предположим, что $\cos\frac{x}{2}\neq 0$, и разделим числитель и знаменатель дроби на $\cos^2\frac{x}{2}\neq 0$, получим:

$$\sin x=\frac{\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+1}=\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Итак,

$$\sin x=\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}. \qquad (1)$$

Формула (1) верна для всех значений x, при которых $\cos\frac{x}{2}\neq 0$, т. е. для всех $x\neq\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Пример 2. Выразите $\cos x$ через $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

Решение. Две известные формулы $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$ и $\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}=1$ позволяют выразить $\cos x$ через $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$:

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Предположим, что $\cos\frac{x}{2}\neq 0$. Разделим числитель и знаменатель дроби на $\cos^2\frac{x}{2}\neq 0$, получим:

$$\cos x=\frac{1-\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{1+\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Итак.

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}. \qquad (2)$$

Формула (2) верна для всех x, при которых $\cos\frac{x}{2}\neq 0$, т. е. для всех $x\neq\pi+2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$.

Пример 3. Выразите $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{ctg}x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Решение. Воспользуемся формулой тангенса двойного аргумента:

$$\operatorname{tg}x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}. \qquad (3)$$

Из формулы (3) можно получить выражение для $\operatorname{ctg}x$:

$$\operatorname{ctg}x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}. \qquad (4)$$

Задание 1. Найдите множество допустимых значений аргумента в формулах (3), (4).

Полученные в этом параграфе формулы (1), (2), (3), (4) удобно применять при выполнении преобразований выражений, содержащих тригонометрические функции, и решении тригонометрических уравнений, когда необходимо различные тригонометрические функции одного и того же аргумента заменить только одной функцией.

Пример 4. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=3$. Найдите $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg}x$, $\operatorname{ctg}x$.

Решение. По формуле (1): $\sin x = \frac{2\cdot 3}{1+9}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

По формуле (2): $\cos x = \frac{1-9}{1+9} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$.

По формуле (3): $\operatorname{tg}x = \frac{2\cdot 3}{1-9} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}x = \frac{1}{\operatorname{tg}x} = -\frac{4}{3}$.

Пример 5. Решите уравнение $3\sin x + 4\cos x = 5$.

Решение. Выразим $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ по формулам (1) и (2), получим:

$$3\cdot\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + 4\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 5, \text{ где } 1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\neq 0,$$

$$6\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 4 - 4\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = 5 + 5\operatorname{tg}^2\frac{x}{2},\ 9\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 6\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1 = 0.$$

Получили уравнение второй степени относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Решим его:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{6\pm\sqrt{36-36}}{18} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n,$$

$$x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi n, \text{ где } n\in\mathbf{Z}.$$

При выводе формул (1) и (2) были исключены числа вида $x=\pi+2\pi n$, где $n\in\mathbf{Z}$. Поэтому такие числа не могут быть получены в качестве корней данного уравнения в случае применения такого способа его решения. Однако эти значения переменной могут удовлетворять данному уравнению, т. е. при нашем способе решения данного уравнения мы можем потерять корни вида $x=\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Поэтому необходимо проверить, не удовлетворяют ли эти числа данному уравнению. Подставим эти значения в его левую часть: $3\sin(\pi+2\pi n) + 4\cos(\pi+2\pi n) = 3\sin\pi + 4\cos\pi = 3\cdot 0 + 4\cdot(-1) = -4\neq 5$. Рассматриваемые значения переменной данному уравнению не удовлетворяют.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Пользуясь формулами (1) и (2), можно аналогично решить любые тригонометрические уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$.

Пример 6. Решите уравнение $2\sin x + 3\cos x = -3$.

Решение.

$$2\cdot\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + 3\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = -3,$$

$$4\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 3 - 3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = -3 - 3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2},$$

$$4\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -6,\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1{,}5,$$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg}(-1{,}5) + \pi n,\ n\in\mathbf{Z},$$

$$x = -2\operatorname{arctg}1{,}5 + 2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Проверка чисел вида $\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$:
$2\sin(\pi+2\pi n) + 3\cos(\pi+2\pi n) = 2\sin\pi + 3\cos\pi = 2\cdot 0 + 3(-1) = -3$.

Таким образом, числа вида $\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, также являются решениями данного уравнения.

Ответ: $-2\operatorname{arctg}1{,}5 + 2\pi n$; $\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Упражнения

1. Упростите выражения:

а) $\frac{\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\cos 2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$; б) $\frac{\cos 2\alpha-\cos 2\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$.

2. Дано: $\mathrm{ctg}\frac{x}{2}=2$. Найдите $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\,x$, $\mathrm{ctg}\,x$.

3. Решите уравнения:

а) $5\sin x+12\cos x=13$; б) $3\sin x+4\cos x+3\,\mathrm{tg}\,x+4=0$;

в) $\sin x-4\cos x=4$; г) $1-\cos 6x=\mathrm{tg}\,3x$;

д) $3\sin x-2\cos x=2$.

4. Вычислите:

$$\frac{2\sin\alpha-3\cos\alpha}{4\sin\alpha+5\cos\alpha},\ \text{если}\ \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=3.$$

5* Решите уравнение $a\sin x+b\cos x=c$, где a, b, c — произвольные действительные числа.

6* Найдите $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$, если $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$.

§ 65. ФОРМУЛЫ СУММЫ И РАЗНОСТИ ОДНОИМЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Иногда при выполнении вычислений, преобразований, при решении уравнений приходится преобразовывать сумму (или разность) тригонометрических функций в произведение функций. Выведем формулы для преобразования в произведение таких сумм и разностей тригонометрических функций:

$$\sin\alpha+\sin\beta,\ \sin\alpha-\sin\beta,\ \cos\alpha+\cos\beta,\ \cos\alpha-\cos\beta.$$

Преобразуем в произведение сумму $\sin\alpha+\sin\beta$. Предположим, что $\alpha=x+y$, $\beta=x-y$. Это предположение допустимо, так как для любых действительных значений α и β найдутся такие единственные x и y. Решая систему уравнений $\begin{cases}\alpha=x+y,\\ \beta=x-y\end{cases}$ относительно x и y, получим: $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Запишем теперь две известные формулы (см. § 59):

$$\sin\alpha=\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y, \qquad (*)$$
$$\sin\beta=\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y. \qquad (**)$$

Сложим почленно эти равенства, получим:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin x\cos y=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Итак,

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (1)$$

Задание 1. Докажите, что

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (2)$$

Указание. Вычтите почленно из равенства (*) равенство (**).

Преобразуем в произведение $\cos\alpha+\cos\beta$. Пусть $\alpha=x+y$, $\beta=x-y$, тогда $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Рассмотрим известные формулы (см. § 58):

$$\cos\alpha=\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y, \qquad (***)$$
$$\cos\beta=\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y. \qquad (****)$$

Сложим почленно эти равенства, получим:

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos x\cdot\cos y=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Итак,

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (3)$$

Задание 2. Докажите, что

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (4)$$

Указание. Вычтите почленно из равенства (***) равенство (****).

Пример 1. Преобразуйте сумму $\sin 84^\circ+\sin 26^\circ$ в произведение.

Решение. Воспользуемся формулой (1):

$$\sin 84^\circ+\sin 26^\circ=2\sin\frac{84^\circ+26^\circ}{2}\cos\frac{84^\circ-26^\circ}{2}=2\sin 55^\circ\cos 29^\circ.$$

Пример 2. Преобразуйте сумму функций $\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta$ в произведение функций.

Решение.

$$\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=$$
$$=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \text{где}\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Упражнения

1. Преобразуйте в произведение:

а) $\cos 47^\circ-\cos 15^\circ$; б) $\cos 58^\circ+\cos 24^\circ$;

в) $\sin 70^\circ+\sin 30^\circ$; г) $\sin 17^\circ-\sin 35^\circ$;

д) $\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}$; е) $\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$.

2. Преобразуйте в произведение:

а) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta$; б) $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta$; в) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta$;
г) $1+\operatorname{tg}\alpha$; д) $1+\operatorname{ctg}\alpha$.

3. Преобразуйте в произведение:

а) $1+\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}$; б) $3-\operatorname{tg}^2\alpha$;
в) $\cos\alpha-\sin\alpha\sin 2\alpha$; г) $\operatorname{ctg}^2\alpha-3$;
д) $\cos\alpha+\sin 2\alpha-\cos 3\alpha$; е) $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$;
ж) $1-\operatorname{tg}\alpha+\sec\alpha$; з) $3-4\sin^2\alpha$;
и) $1-4\cos^2\alpha$; к) $\cos^2\alpha-\cos^2\beta$;
л) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

4. Упростите выражения:

а) $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$; б) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$;
в) $\frac{2\sin\beta-\sin 2\beta}{2\sin\beta+\sin 2\beta}$; г) $\frac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$;
д) $\frac{1}{\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha+1}$; е) $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$.

5. Решите уравнения:

а) $\sin 5x-\sin 3x+\sin x=0$;
б) $\sin x+\sin 3x=\sin 2x+\sin 4x$;
в) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)$;
г) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-3x\right)=\sin(\pi-x)$;
д) $\sin x-\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;
е) $\sin x+\cos x=1$.

§ 66. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пример 1. Решите уравнение

$$\sin^2 x+2\sin x\cos x-3\cos^2 x=0.$$

Решение. Замечаем следующее: а) левая часть уравнения состоит только из алгебраической суммы, причем каждое слагаемое этой суммы является произведением числового множителя и функций синуса или косинуса одного и того же аргумента; б) сумма показателей степеней синуса и косинуса в каждом слагаемом одна и та же (в нашем примере равна 2); в) свободный член в уравнении отсутствует, т. е. равен 0. Такое уравнение называют однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$, а число 2 — порядком его однородности.

В данном уравнении $\cos x\neq 0$. Действительно, если предположить обратное, т. е. что $\cos x=0$, то из уравнения следует, что $\sin^2 x=0$ и $\sin x=0$. Однако не существует таких значений x, при которых одновременно выполняются равенства $\sin x=0$ и $\cos x=0$. Разделим все члены данного уравнения на $\cos^2 x\neq 0$, получим:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}-\frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x}=0,$$

или

$$\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg}x-3=0.$$

Мы получили квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg}x$. Решив его, получим:

а) $\operatorname{tg}x=1$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$;

б) $\operatorname{tg}x=-3$, $x=\operatorname{arctg}(-3)+\pi n=-\operatorname{arctg}3+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\pi n$; $-\operatorname{arctg}3+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Задание 1. Решите уравнения:

а) $2\sin^2 x+3\cos^2 x=5\sin x\cos x$;
б) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$;
в) $3\cos^2 x-\sin^2 x-\sin 2x=0$.

Пример 2. Решите уравнение $3\sin x\cos x-5\cos^2 x=0$.

Решение. Замечаем, что корни уравнения $\cos x=0$ (т. е. числа $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$) удовлетворяют данному уравнению. Поэтому можно левую его часть разложить на множители (вынести за скобки $\cos x$) и затем решить уравнения ($\cos x=0$ и однородное уравнение первого порядка). Мы поступим иначе. Заметим, что $\sin x\neq 0$ (в противном случае из уравнения следует, что и $\cos x=0$, что для одних и тех же значений переменной не выполняется). Разделим каждый член данного уравнения на $\sin^2 x\neq 0$, получим:

$$\frac{3\sin x\cos x}{\sin^2 x}-\frac{5\cos^2 x}{\sin^2 x}=0,\quad 3\operatorname{ctg}x-5\operatorname{ctg}^2 x=0,$$

$$\operatorname{ctg}x(3-5\operatorname{ctg}x)=0.$$

а) $\operatorname{ctg}x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$;

б) $3-5\operatorname{ctg}x=0$, $\operatorname{ctg}x=\frac{3}{5}$, $x=\operatorname{arcctg}\frac{3}{5}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\operatorname{arcctg}\frac{3}{5}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Задание 2. Решите уравнения:

а) $\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$; б) $2\sin x \cos x - \sin^2 x = 0$.

Пример 3. Решите уравнение $5\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 4\cos^2 x = 2$.

Решение Данное уравнение не удовлетворяет всем признакам однородного тригонометрического уравнения (см. решение первого примера) потому, что в нем есть отличный от нуля свободный член, равный 2. Однако это уравнение нетрудно свести к однородному уравнению второго порядка, если этот свободный член умножить на выражение $\sin^2 x + \cos^2 x$, равное единице.

$$5\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 4\cos^2 x - 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0,$$
$$3\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 6\cos^2 x = 0.$$

Получили однородное уравнение относительно $\sin x$ и $\cos x$ второго порядка. Разделим каждый его член на $\cos^2 x \neq 0$. Получим:

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0,$$

а) $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

б) $\operatorname{tg} x = -2$, $x = \operatorname{arctg}(-2) + \pi n = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Задание 3. Решите уравнения:

а) $\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 1 = 0$;

б) $5\sin^2 x - 4\cos x \sin x + 3\cos^2 x = 2$.

Упражнения

1. Сформулируйте признаки однородного относительно $\sin x$ и $\cos x$ тригонометрического уравнения. Приведите примеры таких уравнений.

2. Решите уравнения:

а) $\sin x + \cos x = 0$;

б) $\sqrt{3}\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x = 0$;

в) $\sin^2 x + 0{,}5\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$;

г) $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x \cos x = 0$;

д) $2\sin^2 x + 7\cos^2 x = 6 - 3\sin x \cos x$.

§ 67. ПОВТОРЕНИЕ

1. Как может быть задан вектор?

2. Сформулируйте определение коллинеарных векторов.

3. Как вводятся прямоугольные координаты вектора?

4. Сформулируйте определение скалярного произведения двух векторов. Запишите формулу скалярного произведения двух векторов в координатах.

5. Найдите $\vec{a} \cdot \vec{b}$, если: а) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 8$, $\varphi = (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 135°$; б) $\vec{a} = (3;\ 1)$, $\vec{b} = (-5;\ 6)$.

6. Не пользуясь таблицами, найдите: а) $\cos 105°$; б) $\sin 105°$.

7. Упростите выражения:

а) $\dfrac{\sin 65° \cos 5° - \sin 5° \cos 65°}{\cos 40° \cos 10° + \sin 40° \sin 10°}$; б) $\dfrac{\cos 75° \cos 25° - \sin 75° \sin 25°}{\sin 20° \cos 10° - \cos 20° \sin 10°}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg} 12° + \operatorname{tg} 213°}{1 - \operatorname{tg} 12° \operatorname{ctg} 237°}$; г) $\dfrac{\operatorname{tg} 225° + \operatorname{tg} 171° \operatorname{tg} 21°}{\operatorname{tg}(-171') + \operatorname{tg} 201°}$.

8. Докажите тождества:

а)* $\dfrac{\sin^2\alpha - 1}{(\cos\alpha - \sec\alpha)\cdot\sin\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{cosec}^2\alpha$;

б)* $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha} - 1 + \cos\alpha + \dfrac{\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha} = \cos\alpha \cdot \operatorname{cosec}^2\alpha$;

в) $1 - \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 2\sin^2 x$;

г) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$;

д) $\cos^2\alpha - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} = \cos 2\alpha$;

е) $\sqrt{\sin^2\alpha + \cos 2\alpha} = |\cos\alpha|$.

9. Решите уравнения:

а) $\cos x = 2\sin(30° - x)$;

б) $\sin(30° + x) + \sin(30° - x) = 0$;

в) $\sin^4 x - \cos^4 x = 0{,}5$;

г) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos^2 2x$;

д) $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \sin 2x$;

е) $4\cos^2 x(1 - \cos 2x) = 1 + \cos 2x$;

ж) $\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 0$;

з) $8\sin^2\frac{x}{2} + 3\sin x + 4 = 0$;

и) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x$;

к) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 - \cos 2x$;

л) $1 - \sqrt{3}\sin x = \cos 2x$;

м) $\sin x + \cos x \cdot \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = -\sqrt{3}$.

10. Упростите выражения:

а) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(\pi - \alpha)\sin(2\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$;

б) $\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$.

11. Представьте в виде произведения тригонометрических функций:

а) $\sqrt{3}-2\sin\alpha$; б) $0{,}5+\cos\alpha$;

в) $\cos^2\alpha-\cos^2\beta$; г) $\sin^2\alpha-\cos^2\beta$;

д) $\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)$;

е)* $\sin\alpha+\cos\alpha+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+\sin 3\alpha+\cos 3\alpha$.

12*. Решите уравнения:

а) $2\cos^2 x-\cos x\sin x=1-\sin^2 x$;

б) $\sin 2x-\sin 6x-\sin 10x+\sin 14x=0$;

в) $\sin x\cos x+\cos^2 x+3\sin^2 x=3$;

г) $\sin^4 x-\cos^4 x+\sin 2x+3=0$.

§ 68. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Вычислите $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если:

а) $|\vec{a}|=7$, $|\vec{b}|=4$, $\varphi=(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=150°$;

б) $\vec{a}=(-2;\ 3)$, $\vec{b}=(7;\ -4)$.

2. Не пользуясь таблицами значений тригонометрических функций, вычислите:

а) $\operatorname{tg} 75°$; б) $\sin 65°\cos 5°-\cos 65°\sin 5°$;

в) $\cos 75°\cos 15°-\sin 75°\sin 15°$.

3. Докажите тождества:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\alpha=0{,}5$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\cos x-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\sin x=0{,}5$.

4. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$, если $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

5. Упростите выражения:

а) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$; б) $\frac{\cos 2\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$;

в) $\frac{1+\cos 2\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha+0{,}5}$; г) $\frac{\cos\alpha-\cos 5\alpha}{\sin 5\alpha+\sin\alpha}$.

6. Решите уравнения:

а) $2-2\cos^2 x+\sin x=0$;

б) $2\sin^2(\pi+x)+3\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=0$;

в) $\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}=\sin x$.

Глава VII.

ПРОИЗВОДНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 69. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Прежде чем рассматривать производные тригонометрических функций, сформулируем теорему о их непрерывности, которую мы примем без доказательства.

Теорема 1. ***Каждая из функций $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ непрерывна на своей области определения.***

Эта теорема обозначает, что

1) $\lim\limits_{x\to\alpha}\sin x=\sin\alpha$, $\alpha\in \boldsymbol{R}$,

2) $\lim\limits_{x\to\alpha}\cos x=\cos\alpha$, $\alpha\in \boldsymbol{R}$,

3) $\lim\limits_{x\to\alpha}\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$,

4) $\lim\limits_{x\to\alpha}\operatorname{ctg} x=\operatorname{ctg}\alpha$, $\alpha\neq\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

Теоремой о непрерывности тригонометрических функций мы уже пользовались при построении их графиков.

▶ Докажем, например, что функция $y=\sin x$ непрерывна в любой точке $x_0\in \boldsymbol{R}$. Пусть $\varepsilon>0$ — произвольное сколь угодно малое число. Найдем модуль разности:

$$|\sin x-\sin x_0|=\left|2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|=$$
$$=2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|;$$

так как $\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\leqslant 1$, то

$$|\sin x-\sin x_0|\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|.$$

Заметим, что при любом $\alpha\in \boldsymbol{R}$ выполняется неравенство $|\sin\alpha|\leqslant|\alpha|$ (рис. 179), поэтому $|\sin x-\sin x_0|\leqslant 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|=$ $=|x-x_0|<\varepsilon$. Положив $\delta=\varepsilon$, получим, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$.

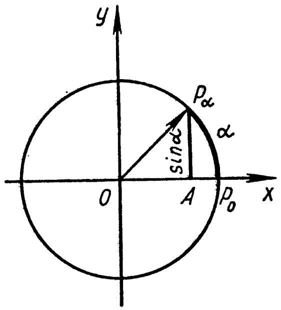


Рис. 179

По определению предела функции имеем:

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0.$$

Последнее равенство означает, что функция $\sin x$ непрерывна в любой точке области своего определения, т. е. на множестве всех действительных чисел. ◀

Таким образом, в силу непрерывности тригонометрических функций предел каждой из них равен ее значению, вычисленному в предельной точке, если эта точка принадлежит области определения функции.

Пример 1. Найдите $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \sin x$.

Решение. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \sin x = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Пример 2. Найдите $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x$.

Решение. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$.

Упражнения

1. Сформулируйте теорему о непрерывности тригонометрических функций.

2. Сформулируйте определения: а) предела функции; б) непрерывности функции в точке.

3. Найдите:

а) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \sin x$; б) $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{4}} \cos x$;

в) $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x$; г) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x$;

д) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg} x}$; е) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \left(\sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \operatorname{tg} x\right)$.

4*. Запишите доказательство непрерывности функции $y = \sin x$ в символической форме.

5*. Докажите непрерывность функции $y = \cos x$.

6*. Докажите непрерывность функций а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{ctg} x$ в каждой точке области их определения.

§ 70. ПРЕДЕЛ ОТНОШЕНИЯ СИНУСА К АРГУМЕНТУ

Теорема.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

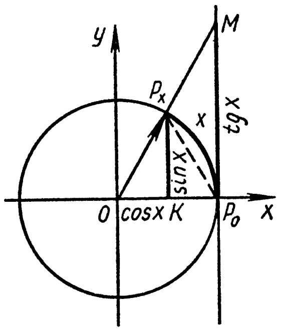


Рис. 180

Заметим, что областью определения функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ будет множество действительных чисел, отличных от нуля. Предел же этой функции при x, стремящемся к нулю, существует и равен единице. Эта теорема помогает находить пределы тригонометрических функций.

▶ Доказательство данной теоремы расчленим на две части. Вначале докажем, что для любого $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ выполняется неравенство

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Рассмотрим единичную окружность (рис. 180). Пусть P_x — точка единичной окружности, соответствующая числу x: $\smile P_0P_x = x$. Через точку P_0 проведем касательную P_0M к единичной окружности. Так как $\triangle OP_xK \backsim \triangle OMP_0$, то $\frac{|P_xK|}{|OK|} = \frac{|MP_0|}{|OP_0|}$, где $|OP_0| = 1$, $|P_xK| = \sin x$, $|OK| = \cos x$. Из пропорции получаем, что

$$|MP_0| = \frac{|P_xK| \cdot |OP_0|}{|OK|} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

Из рисунка 180 замечаем, что для любого $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ выполняется неравенство площадей фигур:

$$S_{\triangle OP_xP_0} < S_{\text{сект.} OP_xP_0} < S_{\triangle OMP_0}.$$

Найдем площади этих фигур:

$$S_{\triangle OP_xP_0} = \frac{1}{2} |P_xK| \cdot |OP_0| = \frac{1}{2} \sin x;$$

$$S_{\text{сект.}\, OP_xP_0} = \frac{1}{2} |OP_0|^2 \cdot |\overset{\smile}{P_0P_x}| = \frac{1}{2} x;$$

$$S_{\triangle OMP_0} = \frac{1}{2} |OP_0| \cdot |MP_0| = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

Подставим значения площадей в неравенство, получим:

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \text{ при } x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[. \qquad (1)$$

Задание 1. Покажите, что неравенство $\sin x < x$ верно при любом $x > 0$, а неравенство $x < \operatorname{tg} x$ выполняется не для всех $x > 0$.

Указание. Рассмотрите графики функций $y=x$ и $y=\operatorname{tg} x$.

Теперь докажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Из неравенства $\sin x<x$ (см. неравенство 1), верного для $x\in\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$, следует, что $\frac{\sin x}{x}<1$. Из неравенства $x<\operatorname{tg} x$ (см. неравенство 1), верного для $x\in\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$, следует: $\frac{\sin x}{x}>\cos x$. Таким образом,

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Если $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\ 0\right[$, то записанное выше неравенство также будет выполняться, так как $\cos(-x)=\cos x$, $\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x}$. Таким образом, можно рассмотреть пределы функций $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ при $x\to 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$, $\lim\limits_{x\to 0}1=1$. Поэтому по теореме о пределе функции, заключенной между двумя другими функциями (см. § 16), получим: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.◀

Рассмотренная теорема может быть истолкована геометрически. Рассмотрим график функции $y=\sin x$ (рис. 181) на промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$. Пусть прямая OM — некоторая секущая синусоиды, проходящая через начало координат. Точка M имеет координаты $(x;\ \sin x)$. Тогда отношение $\frac{\sin x}{x}$ есть угловой коэффициент прямой OM. Представим себе теперь, что точка M движется по синусоиде, приближаясь к началу координат. Тогда секущая OM будет поворачиваться вокруг точки O, приближаясь к касательной, проведенной к графику функции $y=\sin x$ в этой точке.

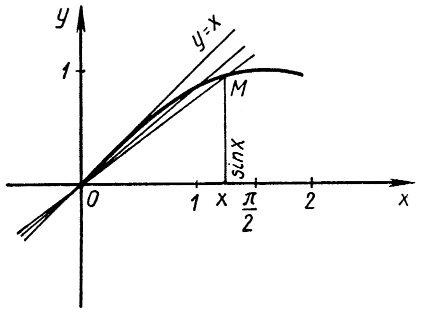


Рис. 181

Равенство $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ означает, что угловой коэффициент касательной, проведенной через начало координат к графику функции $y=\sin x$, равен единице. Касательной служит прямая $y=x$. Таким образом, график функции $y=\sin x$ для $x>0$ проходит под прямой $y=x$ — биссектрисой первого и третьего координатных углов, касаясь этой прямой в начале координат. В силу нечетности функции $y=\sin x$ ее график для $x<0$ проходит над прямой $y=x$, также касаясь этой прямой в начале координат.

Пример 1. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$.

Решение. Мы могли бы воспользоваться теоремой о пределе отношения синуса к аргументу, если бы в знаменателе дроби было не x, а $5x$. Умножим числитель и знаменатель дроби на 5 и воспользуемся теоремами о пределах функций (см. § 16):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.$$

Пример 2. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin 2x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{2\sin 2x}{2x}}=\frac{1}{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}=\frac{1}{2\cdot 1}=\frac{1}{2}.$$

Пример 3. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{2x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x\cos x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\cos 0}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Пример 4. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}}=\frac{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}{3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{2\cdot 1}{3\cdot 1}=\frac{2}{3}.$$

Упражнения

1. Сформулируйте теорему о пределе отношения синуса к аргументу, когда аргумент стремится к нулю.

2*. Докажите неравенство $\sin x<x<\operatorname{tg} x$ при $x\in\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

3*. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, если выполняется неравенство $\sin x<x<\operatorname{tg} x$ при $x\in\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

4. Докажите, что: а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$.

5. Найдите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x}{\sin 5x}$;

г) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\operatorname{tg} x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 5x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$; з) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}{6x+\pi}$.

6. Объясните геометрический смысл предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

§ 71. ПРОИЗВОДНАЯ СИНУСА

Напомним, что производной функции $y=f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения $\Delta f(x)$ функции в этой точке к приращению Δx аргумента, когда Δx стремится к нулю: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

Пользуясь определением производной, найдем производную функции $y=\sin x$:

1) Пусть аргумент x получает приращение Δx; $x+\Delta x$ — новое значение аргумента.

2) Новое значение функции будет $\sin(x+\Delta x)$.

3) Найдем приращение функции: $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x$.

4) Найдем отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}.$$

5) Найдем производную функции $y=\sin x$:

$$y'=(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos\left(x+\frac{0}{2}\right)\cdot 1=\cos x.$$

Получили, что производная синуса равна косинусу:

$$(\sin x)'=\cos x. \qquad (1)$$

Пример 1. Найдите производную функции $y=\sin 3x$.

Решение. Воспользуемся формулой (1) и теоремой о производной сложной функции (см. § 24). Получим:

$$y'=(\sin 3x)'=\cos 3x\cdot(3x)'=3\cos 3x.$$

Пример 2. Найдите производную функции $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Решение.

$$y'=\left(\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right)'=$$

$$=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)'=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Пример 3. Найдите производную функции

$$y=4x\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right).$$

Решение. Воспользуемся теоремами о производной произведения функций и производной сложной функции (см. § 23, 24). Получим:

$$y'=\left(4x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\right)'=$$

$$=4\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)+4x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)'=$$

$$=4\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)-8x\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right).$$

Пример 4. Докажите, что функция $f(x)=\sin x-4x$ убывает на множестве всех действительных чисел.

Решение. Найдем производную данной функции:

$$f'(x)=(\sin x-4x)'=\cos x-4.$$

Так как $|\cos x|\leqslant 1$ при любых действительных значениях x, то $f'(x)=\cos x-4<0$ при $x\in\boldsymbol{R}$. Поэтому данная функция $f(x)=\sin x-4x$ убывает на множестве всех действительных чисел (см. § 31).

Упражнения

1. Составьте конспект вывода формулы производной синуса.

2. Найдите производную следующих функций:

а) $y=3\sin x$; б) $y=\sin 5x$; в) $y=x^2\sin x$;

г) $y=\sin^2 x-\sin 2x$; д) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$; е) $y=\sin\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)$;

ж) $y=3\sin\left(\frac{\pi}{3}-4x\right)$; з) $y=2x^3+\sin 3x$; и) $y=x\sin\sqrt{x}$;

к) $y=\frac{x}{\sin x}$.

3. Докажите, что функция $y=3x+\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$ возрастает на множестве всех действительных чисел.

4. Докажите, что функция $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)-3x$ убывает на множестве всех действительных чисел.

5. При каких значениях параметра a функция $f(x)=ax+\sin 3x$ возрастает при всех $x\in\mathbf{R}$?

6. При каких значениях параметра a функция $f(x)=3x+\sin ax$ возрастает при всех $x\in\mathbf{R}$?

7*. Найдите производные функций:

а) $f(x)=x\cdot\sin^2\sqrt{x}$; б) $f(x)=\frac{x}{\sin^2 x}$;

в) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{2\sin x}$; г) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{\sin x}}$.

§ 72. ПРОИЗВОДНЫЕ КОСИНУСА, ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА

Производную функции $y=\cos x$ можно найти так же, как мы находили производную синуса, т. е. пользуясь определением производной. Мы поступим иначе. Воспользуемся одной из формул приведения: $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. Зная производную синуса и правило дифференцирования сложной функции, получим:

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=$$

$$=\sin x\cdot(-1)=-\sin x.$$

Итак,
$$(\cos x)'=-\sin x.$$

Пример 1. Найдите производную функции $y=3\cos 2x$.

Решение.

$$y'=(3\cos 2x)'=3(-\sin 2x)\cdot(2x)'=-3\sin 2x\cdot 2=-6\sin 2x.$$

Пример 2. Найдите производную функции

$$f(x)=\sin 2x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right).$$

Решение. Воспользуемся правилом дифференцирования произведения функций, получим:

$$f'(x)=(\sin 2x)'\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)+\sin 2x\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\right)'=$$

$$=\cos 2x\cdot(2x)'\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)+\sin 2x\cdot\left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)'=2\cos 2x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)+$$

$$+\sin 2x\cdot\left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\right)\cdot(-3)=$$

$$=2\cos 2x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)+3\sin 2x\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right).$$

Производные функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ найдем, воспользовавшись формулами $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$, правилом дифференцирования частного и известными формулами производных синуса и косинуса:

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\cdot\cos x-(-\sin x)\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак,

$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\ \text{если}\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

$$(\operatorname{ctg} x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{(-\sin x)\sin x-\cos x\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Итак,

$$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x},\ \text{если}\ x\neq\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Пример 3. Найдите производную функции $y=-\operatorname{tg} 3x$.

Решение. $y'=(-\operatorname{tg} 3x)'=-\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot(3x)'=-\frac{3}{\cos^2 3x}$.

Пример 4. Найдите производную функции $y=\operatorname{ctg}(2x-0{,}3)$.

Решение.

$$y'=(\operatorname{ctg}(2x-0{,}3))'=-\frac{1}{\sin^2(2x-0{,}3)}\cdot(2x-0{,}3)'=$$

$$=-\frac{2}{\sin^2(2x-0{,}3)}.$$

Задание. Найдите производные функций:

$y=\sin(ax+b)$, $y=\cos(ax+b)$, $y=\operatorname{tg}(ax+b)$.

Приведем таблицу производных тригонометрических функций:

Функция	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
Производная	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Упражнения

1. Выведите формулу производной функции $y = \cos x$, воспользовавшись определением производной.

2. Изучите и запишите в символической форме вывод формул производных тангенса и котангенса.

3. Найдите производные следующих функций:

а) $y = \cos 5x$;
б) $y = x \cdot \cos x$;
в) $y = \sin x \cdot \cos x$;
г) $y = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$;
д) $y = \operatorname{tg} 7x$;
е) $y = x^2 \operatorname{tg} x$;
ж) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{3x}$;
з) $y = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$;
и) $y = 5x^2 - \sin^2 x \cos x$;
к) $y = -3\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 5\cos 0{,}2x$.

4. Найдите производные следующих функций:

а) $y = x^2 \sin x$;
б) $y = x^2 \cos x$;
в) $y = (1 - 2\sin x)(2 - \cos x)$;
г) $y = (3 + 4\cos x)(x - 3\sin x)$;
д) $y = A \sin bx$;
е) $y = A \cos(bx + c)$.

§ 73. ПОНЯТИЕ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть дана функция $f(x) = x^3$. Ее производная равна $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$. Эту функцию называют первой производной данной функции. Значение первой производной в каждой точке есть мгновенная скорость изменения данной функции. Можно найти производную от первой производной. Такую производную называют второй производной данной функции. Ее обозначают так: $f''(x)$ (читают: «эф два штриха от икс»);

$$f''(x) = (f'(x))' = (3x^2)' = 6x.$$

Таким образом, второй производной $f''(x)$ функции $f(x)$ называют производную первой производной $f'(x)$ данной функции.

Пример 1. Найдите $f''(x)$, если $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 1$.

Решение. $f'(x) = (2x^3 + 5x^2 - 1)' = 6x^2 + 10x$;
$f''(x) = (f'(x))' = (6x^2 + 10x)' = 12x + 10$.

Пример 2. Найдите $f''(x)$, если $f(x) = \sin x$.

Решение. $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$;
$f''(x) = (\cos x)' = -\sin x$.

Пример 3. Найдите $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)$, если $f(x) = 3\sin 2x$.

Решение. $f'(x) = (3\sin 2x)' = 3\cos 2x \cdot (2x)' = 6\cos 2x$;
$f''(x) = (6\cos 2x)' = 6 \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)' =$
$= -12\sin 2x$;

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -12 \cdot \sin 2 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right) = -12\sin\frac{\pi}{2} = -12.$$

Пример 4. Найдите $f''\left(\frac{\pi}{3}\right)$, если $f(x) = 2\cos\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

Решение.

$$f'(x) = \left(2\cos\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right)\right)' =$$

$$= 2 \cdot \left(-\sin\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right)\right)\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right)' = -6\sin\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$f''(x) = \left(-6\sin\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right)\right)' =$$

$$= -6\cos\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right)\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right)' = -18\cos\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -18\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) = -18\cos\frac{\pi}{3} = -18 \cdot \frac{1}{2} = -9.$$

Значение второй производной в каждой точке есть мгновенная скорость изменения скорости данной функции. Если по знаку первой производной функции можно судить о ее возрастании или убывании, то по знаку второй производной можно судить о том, как происходит это изменение — ускоренно или замедленно.

Упражнения

1. На рисунке 182 изображен график непрерывной функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $]a;\ b[$. Назовите числовые промежутки, на которых данная функция: а) постоянна; б) убывает; в) возрастает.

2. Найдите вторую производную следующих функций:

а) $y = x^3 - 2x$;
б) $y = \sin 3x$;
в) $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$;
г) $y = \cos x + 2\sin x$;
д) $y = -3\sin(0{,}2x + \pi) + 2\cos 3x$;
е) $y = x^2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$.

3. Исследуйте поведение функции $y = x^2 - x - 2$ при помощи производной.

4. Исследуйте поведение функции $f(x) = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $]0;\ \pi[$ при помощи производной.

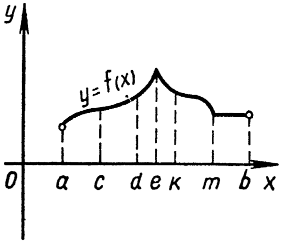


Рис. 182

§ 74*. ПОНЯТИЕ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Многие процессы, происходящие в природе, могут быть описаны с помощью особых уравнений, называемых дифференциальными.

Дифференциальным уравнением называют такое уравнение, которое содержит неизвестную функцию, а также ее производные.

Например, дифференциальными уравнениями будут уравнения: $f'(x)+2f(x)=0$, $f''(x)-f'(x)=3f(x)$. Первое из них называют дифференциальным уравнением первого порядка, а второе — второго порядка. Порядком дифференциального уравнения называют порядок наивысшей производной, входящей в него.

Решением дифференциального уравнения называют такую функцию $f(x)$, определенную на некотором промежутке $]a;\ b[$, при подстановке которой в данное дифференциальное уравнение оно обращается в тождество при любом $x\in]a;\ b[$.

Изучение методов решения дифференциальных уравнений выходит за рамки программы средней школы, поэтому рассматриваемые ниже примеры дифференциальных уравнений мы будем решать методом подбора, т. е. будем предполагать, что некоторая функция является решением данного дифференциального уравнения, а затем подстановкой этой функции и ее производных в уравнение убеждаться, что это предположение верно.

Пример 1. Решите уравнение $f'(x)-2x=0$.

Решение. Если предположить, что $f(x)=x^2$, то $f'(x)=2x$. Так как $(x^2)'-2x=0$ при любых значениях $x\in\boldsymbol{R}$, то $f(x)=x^2$ является решением данного дифференциального уравнения на множестве $\boldsymbol{R}$. Нетрудно заметить, что функции $\varphi(x)=x^2+5$, $\psi(x)=x^2-3$ и вообще $q(x)=x^2+C$, где C — любое число, являются решениями данного дифференциального уравнения (проверьте это подстановкой). Можно доказать, что других решений данное уравнение не имеет.

Задание 1. Найдите одно из решений дифференциального уравнения: а) $f'(x)=\sin x$; б) $f''(x)=\cos x$; в) $f'(x)=3x^2+2$.

Гармонические колебания. Изучение в физике и технике различных колебательных процессов связано с рассмотрением тригонометрических функций. С примерами колебательных движений приходится встречаться довольно часто: движение маятника часового механизма, колебания струны музыкального инструмента, колебания воды от брошенного в нее камня и др. Наиболее простые колебательные движения — это гармонические колебания.

Говорят, что физическая величина совершает гармонические колебания, если ее изменение с течением времени описывается

функцией $f(t)$, являющейся решением дифференциального уравнения

$$f''(t)=-\omega^2 f(t), \tag{1}$$

где ω — некоторая положительная константа. Таким образом, при гармоническом колебании вторая производная функции, описывающей изменяемую величину, пропорциональна самой функции. Уравнение (1) называют дифференциальным уравнением гармонических колебаний. Можно доказать, что любое решение уравнения (1) имеет вид:

$$f(t)=A\cos(\omega t+\varphi), \tag{2}$$

где A, ω, φ — некоторые константы, носящие специальные названия: A — амплитуда, ω — частота, φ — начальная фаза колебания.

Величину $T=\frac{2\pi}{\omega}$ называют периодом гармонического колебания, а величину $\omega t+\varphi$ — его фазой. Физический смысл периода таков: период T — это время, в течение которого фаза колебания меняется на 2π. Покажем, что функция (2) является решением уравнения (1). Найдем:

$$f'(t)=(A\cos(\omega t+\varphi))'=-A\sin(\omega t+\varphi)\cdot(\omega t+\varphi)'=$$
$$=-A\omega\sin(\omega t+\varphi),$$
$$f''(t)=(-A\omega\sin(\omega t+\varphi))'=-A\omega\cos(\omega t+\varphi)\cdot(\omega t+\varphi)'=$$
$$=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi).$$

Подставив $f''(t)$ и $f(t)$ в уравнение (1), получим тождество. Поэтому функция (2) есть решение дифференциального уравнения (1). Аналогично можно доказать, что гармоническое колебание описывается также уравнением $f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$.

Задание 2. Докажите, что функция $y=A\sin(\omega t+\varphi)$ является решением уравнения (1).

Примером гармонического колебания может служить движение по прямой материальной точки массы m под действием силы F, притягивающей эту материальную точку к некоторой точке O, принадлежащей той же прямой. Модель такого движения изображена на рисунке 183. За начало системы координат принята середина O отрезка BC. Отклонение точки M от точки O будем обозначать $x(t)$, где t — время. Согласно второму закону Ньютона $ma=F$, где F — сила упругости, действующая со стороны пружины на материальную точку M; $F=-kx$, где k — коэффициент упругости пружины, $a=x''(x)$ — ускорение движения. Тогда второй закон Ньютона примет вид дифференциального уравнения второго порядка: $mx''(t)=$

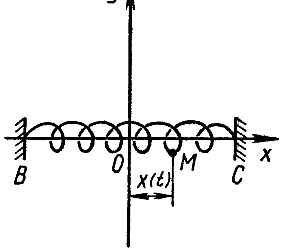


Рис. 183

$= -kx(t)$ или $x''(t) = -\frac{k}{m}x(t)$. Если положить, что $\frac{k}{m} = \omega^2$, и в качестве ω взять значение $\sqrt{\frac{k}{m}}$, то полученное уравнение примет вид уравнения (1). Как было сказано выше, величина, изменение которой описывается таким уравнением, совершает гармоническое колебание. Решением полученного уравнения будет функция

$$\psi(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi\right).$$

Частота ω колебания материальной точки M может быть вычислена по формуле $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, от да следует, что частота колебания определяется лишь массой m и упругостью k пружины. Если задать некоторые начальные условия задачи, например положение $x(t_0)$ материальной точки в некоторый момент времени t_0 и скорость $x'(t_0)$ в этот момент времени, то можно найти значение амплитуды A и начальной фазы φ колебания и тем самым полностью найти закон движения материальной точки M.

Задание 3. Движение материальной точки задано уравнением $f(x) = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$. Какое это движение? Чему равна амплитуда, частота и начальная фаза колебания? Постройте график колебания.

Сложение гармонических колебаний. Можно доказать, что сумма двух любых гармонических колебаний с одним и тем же периодом (частотой) снова является гармоническим колебанием с тем же периодом (частотой):

$$A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2) = A_3\cos(\omega t + \varphi_3).$$

В общем виде мы это утверждение доказывать не будем. Рассмотрим лишь частный случай. Гармоническое колебание $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ (2) можно представить в виде:

$$f(t) = A(\cos\omega t\cdot\cos\varphi - \sin\omega t\cdot\sin\varphi) =$$
$$= A\cos\omega t\cdot\cos\varphi - A\sin\omega t\cdot\sin\varphi.$$

Введем обозначения: $A\cos\varphi = a$; $-A\sin\varphi = b$ (3), где a и b — некоторые числа. Теперь гармоническое колебание (2) можно записать в виде $A\cos(\omega t + \varphi) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ (4). Уравнение (4) показывает, что произвольное гармоническое колебание $A\cos(\omega t + \varphi)$ может быть представлено в виде суммы двух более простых гармонических колебаний $a\cos\omega t + b\sin\omega t$ с той же частотой и нулевыми начальными фазами.

Докажем обратное, что сумма двух гармонических колебаний $a\cos\omega t$ и $b\sin\omega t$ с одной и той же частотой и нулевыми фазами есть снова некоторое гармоническое колебание $A\cos(\omega t + \varphi)$ с той же частотой, т. е. что $a\cos\omega t + b\sin\omega t = A\cos(\omega t + \varphi)$.

Для доказательства этого, очевидно, необходимо подобрать такие значения A и φ, чтобы они удовлетворяли равенствам (3). Решим систему двух уравнений $\begin{cases} A\cos\varphi = a, \\ -A\sin\varphi = b \end{cases}$ относительно переменных A и φ.

Возведем каждое уравнение этой системы в квадрат и сложим почленно полученные уравнения:

$$+\begin{cases} A^2\cos^2\varphi = a^2, \\ A^2\sin^2\varphi = b^2 \end{cases}$$
$$\overline{A^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = a^2 + b^2,}$$

так как $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, то $A^2 = a^2 + b^2$, $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ (5)

Из равенств (3) могут быть получены два равенства:

$$\cos\varphi = \frac{a}{A} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},\quad \sin\varphi = -\frac{b}{A} = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (6),$$

позволяющие однозначно находить φ.

Итак, мы доказали, что $a\cos\omega t + b\sin\omega t = A\cos(\omega t + \varphi)$, т. е. что сумма двух гармонических колебаний $a\cos\omega t + b\sin\omega t$ с одинаковой частотой и нулевыми фазами есть также гармоническое колебание $A\cos(\omega t + \varphi)$ с той же частотой.

Пример 2. Даны гармонические колебания $\varphi(t) = \sqrt{3}\cos\frac{1}{2}t$ и $\psi(t) = \sin\frac{1}{2}t$. Найдите результирующее колебание.

Решение. Так как данные колебания имеют одну и ту же частоту, то их сумма будет гармоническим колебанием с той же частотой:

$$f(t) = \varphi(t) + \psi(t) = \sqrt{3}\cos\frac{1}{2}t + \sin\frac{1}{2}t.$$

Для нахождения амплитуды A результирующего колебания воспользуемся формулой (5). Имеем: $a = \sqrt{3}$, $b = 1$,

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Для нахождения начальной фазы результирующего колебания воспользуемся формулами (6). Имеем:

$$\cos\varphi = \frac{a}{A} = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\varphi = -\frac{b}{A} = -\frac{1}{2},\ \text{поэтому}\ \varphi = -\frac{\pi}{6}.$$

Итак, получили результирующее колебание:

$$f(t) = \sqrt{3}\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2} = 2\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{6}\right).$$

Это колебание является также гармоническим с той же частотой $\omega = \frac{1}{2}$ (или периодом $2\pi : \frac{1}{2} = 4\pi$) и с начальной фазой $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.

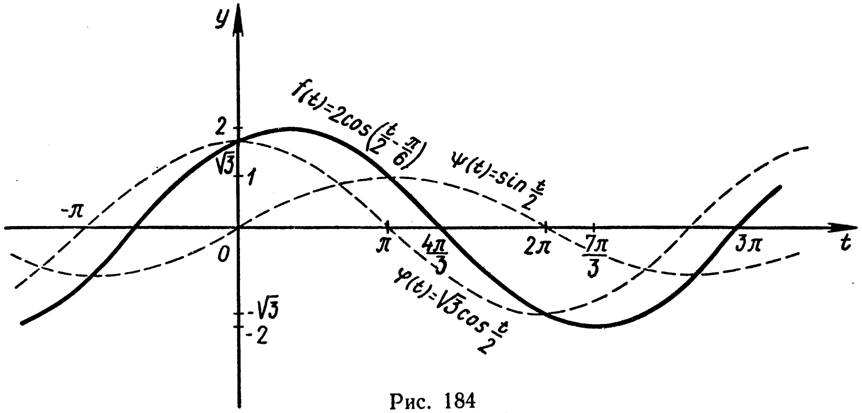


Рис. 184

На рисунке 184 изображены графики данных колебаний и результирующего.

Задание 4. Найдите результирующее гармоническое колебание двух гармонических колебаний $\varphi(t)=-\cos 2t$ и $\varphi(t)=\sqrt{3}\sin 2t$. Постройте его график.

Замечание. Результатом сложения гармонических колебаний с различными частотами служит более сложное колебание, вообще говоря, отличное от гармонического колебания. Например, на рисунке 185 изображены два гармонических колебания $\varphi(t)=\cos t$ и $\psi(t)=\sin 2t$. Суммарное колебание $f(t)=\cos t+\sin 2t$ уже не будет гармоническим.

Пример 3. Найдите наибольшее значение функции $y=3\sin x+4\cos x$ на множестве действительных чисел.

Решение. *Способ 1.* Воспользуемся формулой (5) нахождения амплитуды результирующего гармонического колебания $A=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$. Запишем данную функцию в виде

$$y=5\left(\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x\right).$$

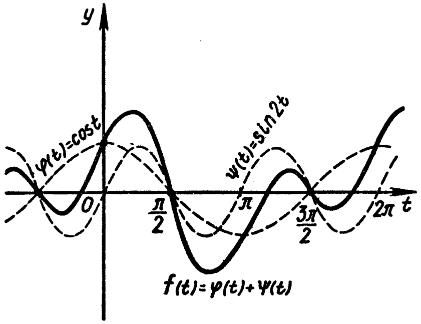


Рис. 185

Обозначим $\frac{3}{5}=\cos\varphi$, тогда $\frac{4}{5}=\sin\varphi$. Получим:

$$y=5(\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi)=\\=5\sin(x+\varphi).$$

Теперь видно, что наибольшее значение данной функции равно 5.

Способ 2. Для решения данной задачи воспользуемся скалярным произведением двух векторов. Напомним формулы: $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$, $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$, где $\varphi\in[0;\ \pi]$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$, $|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$.

Рассмотрим векторы $\vec{a}=(3;\ 4)$ и $\vec{b}=(\sin x;\ \cos x)$. Тогда $y=3\sin x+4\cos x=\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{\sin^2x+\cos^2x}=5$. Таким образом, $y\leqslant 5$. Наибольшее значение данной функции равно 5.

Упражнения

1. Приведите примеры дифференциальных уравнений.

2. Найдите одно из решений дифференциального уравнения:

а) $f'(x)=3x^2$; б) $f'(x)-2x+5=0$; в) $f'(x)=-\cos x$.

3. Докажите, что дифференциальное уравнение $f'(x)=5x^4$ имеет бесконечное множество решений, отличающихся друг от друга лишь постоянным слагаемым.

4. Запишите дифференциальное уравнение гармонического колебания.

5. Докажите, что функция $f(t)=\sin 5t$ описывает гармоническое колебание.

6. Даны гармонические колебания $\varphi(t)=-\sqrt{3}\cos t$ и $\psi(t)=-\sin t$. Найдите результирующее гармоническое колебание.

7. Докажите, что сумма двух гармонических колебаний с одной и той же частотой и нулевой начальной фазой есть гармоническое колебание.

8. Постройте графики гармонических колебаний:

а) $y=3\cos\frac{t}{2}$; б) $y=1{,}5\sin(2t-0{,}5)$.

9. Найдите амплитуду, частоту, период и начальную фазу гармонического колебания:

а) $y=\cos 2x-\sin 2x$; б) $y=3\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$.

10*. Решите тригонометрические уравнения:

а) $2\sin x=1-3\cos x$; б) $4\sin x=4-\cos x$.

§ 75. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

В этом параграфе рассмотрим некоторые задачи, решаемые с помощью производных тригонометрических функций.

Пример 1. Найдите угол, образованный касательной, проведенной к синусоиде $y=3\sin\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$ в точке $x=\frac{\pi}{3}$, с положительным направлением оси абсцисс.

Решение. $f'(x)=\left(3\sin\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)\right)'=$

$$=3\cos\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{3}{2}=4{,}5\cos\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{6}\right).$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=4{,}5\cos\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=4{,}5\cos\frac{\pi}{3}=4{,}5\cdot\frac{1}{2}=2{,}25.$$

$$\operatorname{tg}\alpha=2{,}25,\quad \alpha\approx 75^\circ\,37'.$$

Задание 1. Найдите угол, образованный касательной к косинусоиде $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ в точке $x=\frac{\pi}{8}$ с положительным направлением оси абсцисс.

Пример 2*. Найдите точки максимума функции $f(x)=2\sin x\cos 2x$ на промежутке $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

Решение. Находим производную данной функции:

$$f'(x)=(2\sin x\cos 2x)'=2(\sin x)'\cos 2x+2\sin x(\cos 2x)'=$$
$$=2\cos x\cos 2x-4\sin x\sin 2x.$$

Находим критические точки:

$$f'(x)=0,$$
$$2\cos x\cos 2x-4\sin x\sin 2x=0,$$
$$\cos x\cos 2x-2\sin x\sin 2x=0,$$
$$\cos x\cos 2x-2\sin x\,2\sin x\cos x=0,$$
$$\cos x(\cos 2x-4\sin^2 x)=0.$$

а) $\cos x=0$. На промежутке $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$ это уравнение решений не имеет.

б) $\cos 2x-4\sin^2 x=0,$
$\cos^2 x-\sin^2 x-4\sin^2 x=0,$
$\cos^2 x-5\sin^2 x=0.$

Получили однородное тригонометрическое уравнение, $\cos x\neq 0$. Разделим обе его части на $\cos^2 x$:

$$1-5\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=0,\quad 1-5\operatorname{tg}^2 x=0,\quad \operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{5},$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{1}{\sqrt{5}}\ \text{или}\ \operatorname{tg} x=-\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$x=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}+\pi n\ \text{или}\ x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

На промежутке $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$ получили только одну критическую точку: $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$. Испытываем этот корень: вычислим знак производной в точках, расположенных левее и правее $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}\approx 0{,}4$ рад:

$$f'(0{,}3)=2\cos 0{,}3\cdot\cos 0{,}6-4\sin 0{,}3\cdot\sin 0{,}6\approx 2\cdot 1\cdot 0{,}8-$$
$$-4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}6=1{,}6-0{,}72>0;$$

$$f'(0{,}5)=2\cos 0{,}5\cdot\cos 1-4\sin 0{,}5\cdot\sin 1\approx 2\cdot 0{,}9\cdot 0{,}5-$$
$$-4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}8=0{,}9-1{,}6<0.$$

Следовательно, $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$ — точка максимума.

Задание 2*. Найдите экстремум функции $f(x)=\sin x\cos^2 x$ на промежутке $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

Пример 3*. Исследуйте функцию $f(x)=2\cos x+\sin 2x$ и постройте ее график.

Решение. 1. $D(f)=\mathbf{R}$.

2. $E(f)$ искать не будем.

3. Функция свойствами четности (нечетности) не обладает.

4. Период функции $\cos x$ равен 2π, период функции $\sin 2x$ равен π, поэтому период функции $f(x)$ равен 2π. Исследование данной функции достаточно провести на промежутке $[0;\ 2\pi]$.

5. Найдем нули функции: $f(x)=0,\quad 2\cos x+\sin 2x=0,$

$$2\cos x+2\sin x\cos x=0,\qquad 2\cos x(1+\sin x)=0,$$

а) $\cos x=0,\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z};$

б) $1+\sin x=0,\ \sin x=-1,\ x=(-1)^n\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$

На промежутке $[0;\ 2\pi]$ получим два нуля данной функции: $x_1=\frac{\pi}{2},\ x_2=\frac{3\pi}{2}$.

6. Найдем производную данной функции:

$$f'(x)=(2\cos x+\sin 2x)'=(2\cos x)'+(\sin 2x)'=$$
$$=2(-\sin x)+\cos 2x(2x)'=-2\sin x+2\cos 2x.$$

7. Найдем критические точки данной функции: $y'=0$,

$$-2\sin x+2\cos 2x=0,\ \sin x-\cos^2 x+\sin^2 x=0,$$
$$\sin x-(1-\sin^2 x)+\sin^2 x=0,$$
$$2\sin^2 x+\sin x-1=0,$$
$$\sin x=\frac{-1\pm 3}{4},$$
$$\sin x=\frac{1}{2}\ \text{или}\ \sin x=-1,$$
$$x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n\ \text{или}\ x=(-1)^n\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

На промежутке $[0;\ 2\pi]$ получаем три критические точки: $x_1=\frac{\pi}{6},\ x_2=\frac{5\pi}{6},\ x_3=\frac{3\pi}{2}$.

8. Для нахождения промежутков возрастания и убывания данной функции, а также ее точек максимума и минимума составим таблицу:

x	$\left]0;\ \frac{\pi}{6}\right[$	$\frac{\pi}{6}$	$\left]\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right[$	$\frac{5\pi}{6}$	$\left]\frac{5\pi}{6};\ \frac{3\pi}{2}\right[$	$\frac{3\pi}{2}$	$\left]\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right[$
$f'(x) = -2\sin x + 2\cos 2x$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x) = 2\cos x + \sin 2x$	↗	$\approx 2{,}6$	↘	$\approx -2{,}6$	↗	0	↗
		max		min		нет экстремума	

В точке $x = \frac{3\pi}{2}$ данная функция ни максимума, ни минимума не имеет. Ось абсцисс касается графика функции в точке $\left(\frac{3\pi}{2};\ 0\right)$; $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$.

9. Найдем значения данной функции на концах промежутка $[0;\ 2\pi]$.

$$f(0) = 2\cos 0 + \sin 2\cdot 0 = 2,\ f(2\pi) = 2\cos 2\pi + \sin 2\cdot 2\pi = 2.$$

Теперь строим график данной функции на промежутке $[0;\ 2\pi]$ (рис. 186), а затем продолжаем его периодически на множество всех действительных чисел.

Задание 3*. Исследуйте функцию $f(x) = \cos 2x - \cos x$ и постройте ее график.

Пример 4. Найдите наибольшую площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы, длина диагонали которой равна $\sqrt{2}$ м.

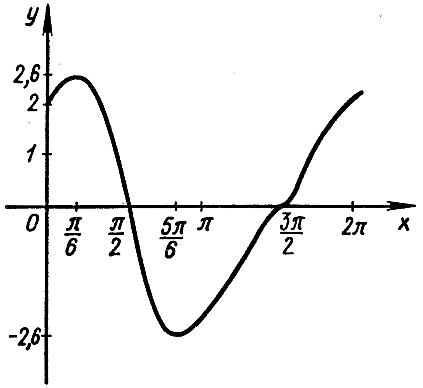


Рис. 186

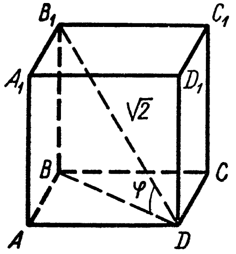


Рис. 187

Решение. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данная призма (рис. 187), $\widehat{B_1DB} = \varphi$, $S = 4|AB|\cdot|BB_1|$.

Из $\triangle BB_1D$: $|BB_1| = \sqrt{2}\sin\varphi$, $|BD| = \sqrt{2}\cos\varphi$.

Из $\triangle ABD$: $|AB| = |BD|\sin 45°$,

$$|AB| = \sqrt{2}\cos\varphi\cdot\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$|AB| = \cos\varphi.$$

$$S(\varphi) = 4\cos\varphi\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\varphi = 2\sqrt{2}\sin 2\varphi.$$

Полученную функцию теперь нужно исследовать на максимум. Это исследование мы, как правило, выполняем с помощью производной. Однако нетрудно заметить, что на промежутке $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$ функция $S(\varphi)$ принимает наибольшее значение, если $\sin 2\varphi = 1$, т. е. при $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Поэтому наибольшее значение площади боковой поверхности призмы получаем при $\varphi = \frac{\pi}{4}$; $S\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$ м^2.

В данной задаче при нахождении наибольшего значения функции $S(\varphi)$ можно, таким образом, обойтись без применения производной.

Задание 4. Расстояние от центра нижнего основания цилиндра до точки окружности верхнего основания равно $\sqrt{2}$ м. Какова должна быть высота цилиндра, чтобы площадь его боковой поверхности была наибольшей?

Указание. Площадь боковой поверхности цилиндра вычисляют по формуле $S = 2\pi Rh$, где R — радиус основания, h — высота цилиндра.

Упражнения

1. Найдите производные функций:

а) $f(x) = \sin 5x - \cos 5x + \operatorname{tg}\frac{x}{4}$; б) $\varphi(x) = \cos 2x\cdot\operatorname{tg} 5x$.

2. Найдите угол, образованный касательной, проведенной к графику функции $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ в точке $x = \frac{\pi}{6}$, с положительным направлением оси абсцисс.

§ 76. ПОВТОРЕНИЕ

1. Сформулируйте определение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

2. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке. Как записывается условие непрерывности: а) функции $f(x)$ в точке $x = a$; б) функции $\cos x$ в точке $x = x_0$?

3. Найдите $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$.

4. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos x$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}\cos x$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{2\pi}{3}}\sin x$;

д) $\lim\limits_{x\to\frac{5\pi}{4}}\operatorname{tg} x$.

5. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{8x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{3x}$.

6. Запишите правила дифференцирования сложных функций:

а) $(f(\varphi(x)))'$; б) $(\sin(ax+b))'$; в) $(A\sin(\omega t+\varphi))'$;

г) $(\cos(ax+b))'$; д) $(A\cos(\omega t+\varphi))'$; е) $(\operatorname{tg}(ax+b))'$.

7. Найдите производные функций: а) $f(x)=\frac{1}{3}\sin 2x$; б) $\varphi(x)=\sin 0{,}5x-x^2$; в) $g(x)=\sin 2x-2\cos 3x$.

8. Докажите, что функция $f(x)=\sin x-3x$ убывает на множестве всех действительных чисел.

9. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ в точке с абсциссой $x=0$.

10. Найдите производные функций:

а) $f(x)=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x$;

б) $g(x)=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$;

в) $\varphi(x)=3\sin(\pi-x)+2\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;

г) $h(x)=4\sin x\cos x$.

11. Найдите вторую производную функций:

а) $y=x^5-7x^2$; б) $y=-2\cos 3x$; в) $y=\sin x\cos^2 3x$.

12*. Исследуйте функции и постройте их графики:

а) $y=\cos 2x$; б) $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$; в) $y=1{,}5\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$;

г) $y=-\sin 3x$; д) $y=-\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$; е) $y=-2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$;

ж) $y=-\operatorname{tg} 2x$; з) $y=-\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$; и) $y=-2\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

13*. Найдите угол, образованный касательной, проведенной к графику функции $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ в точке $x=0$, с положительным направлением оси абсцисс.

§ 77. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Найдите: а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\cos 2x$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin 3x$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}$.

2. Найдите производные функций:

а) $y=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$; б) $y=\operatorname{tg} 2x$;

в) $y=(1-2\cos x)(3+\sin x)$.

3. Докажите, что функция $f(x)=5x+3\cos x$ возрастает на множестве действительных чисел.

4. Опишите свойства функции $y=3\cos x$ и постройте ее график.

5. Найдите угол, образованный касательной, проведенной к графику функции $y=3\sin\frac{1}{3}x$ в точке $x=0$, с положительным направлением оси абсцисс.

6. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=\sin x$ в точке с абсциссой $x_0=\pi$. Выполните схематический рисунок.

Глава VIII.

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ, ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ, СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИИ И ИХ ПРОИЗВОДНЫЕ

§ 78. СТЕПЕНЬ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

С понятием степени вы познакомились в курсе алгебры восьмилетней школы.

Первоначально степень определялась для натурального показателя $n > 1$ и произвольного действительного основания a. Именно, если n — натуральное число и a — произвольное действительное число, то степень a^n есть произведение n множителей, каждый из которых равен a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

При $n = 1$ $a^n = a^1 = a$.

Опираясь на эти определения, были доказаны свойства степени, которые можно подразделить на две группы:

I. Свойства степени, выражающиеся равенствами:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2) $(a^m)^n = a^{mn}$;

3) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, где $b \neq 0$;

5) $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}, & \text{если } m > n \text{ и } a \neq 0, \\ \frac{1}{a^{n-m}}, & \text{если } n > m \text{ и } a \neq 0. \end{cases}$

II. Свойства степени, выражающиеся неравенствами:

1) если $0 < a < b$, то $a^n < b^n$;

2) если $a > 1$ и $m > n$, то $a^m > a^n$;

3) если $0 < a < 1$ и $m > n$, то $a^m < a^n$;

4) если $a < 0$, то $a^n > 0$ при $n = 2k$ (n — четное) и $a^n < 0$ при $n = 2k - 1$ (n — нечетное).

Для степеней с нулевым и целым отрицательным показателями вводились специальные определения:

$$a^0 = 1 \text{ при } a \neq 0;$$

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k} \text{ при } a \neq 0,\ k \in \boldsymbol{N}.$$

Принятые определения степени с нулевым и целым отрицательным показателями позволяют распространить свойства степени с натуральным показателем на степени с любым целым показателем.

Следующим этапом расширения понятия степени является рассмотрение степени с любым рациональным показателем.

Если r — произвольное рациональное число, т. е. $r = \frac{m}{n}$, где $n \in \boldsymbol{N}$, $m \in \boldsymbol{Z}$ и $a > 0$, то

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Подчеркнем, что степень a^r определяется только для положительного основания a и сама степень a^r также является положительным числом.

Свойства степени, установленные для степени с натуральным, а затем и с произвольным целым показателем, верны и для степени с любым рациональным показателем.

Заключительным этапом расширения понятия степени является рассмотрение степени a^α с любым действительным показателем α и положительным основанием a.

Множество действительных чисел есть объединение множества рациональных и множества иррациональных чисел. Степень с рациональным показателем уже определена, поэтому нам остается определить степень с иррациональным показателем. Введем такое определение, чтобы для степеней с иррациональными показателями сохранялись свойства степеней с рациональными показателями. Выскажем некоторые соображения, которые позволяют понять, как определяется степень с любым иррациональным показателем. Рассуждения проведем в общем виде параллельно с иллюстрацией примера.

Пусть α — произвольное иррациональное число; r_1, r_2, r_3, ..., r_n, ... — возрастающая последовательность рациональных чисел, имеющая предел α (например, последовательность все более точных десятичных приближений числа α с недостатком):

$$r_1 < r_2 < r_3 < \ldots < r_n < \ldots;$$

$$\lim_{n \to \infty} r_n = \alpha.$$

Если $a > 1$, то по свойству II(2) степени с рациональным показателем имеет место неравенство $a^{r_1} < a^{r_2} < a^{r_3} < \ldots$ $\ldots a^{r_n} < \ldots$

Для определенности пусть $\alpha = \sqrt{2}$.

Рассмотрим последовательность 1; 1,4; 1,41; 1,414; ... все более точных десятичных приближений числа $\sqrt{2}$ с недостатком. Она возрастает: $1 < 1{,}4 < 1{,}41 < 1{,}414 < \ldots$, предел этой последовательности равен $\sqrt{2}$.

Пусть $a = 10$, тогда по свойству II(2) имеем:

$$10^1 < 10^{1{,}4} < 10^{1{,}41} < \ldots .$$

Последовательность чисел a^{r_1}; a^{r_2}, a^{r_3}, ..., a^{r_n}, ... является возрастающей и ограниченной, так как любой ее член меньше, например, числа a^k, где k — произвольное рациональное число, большее α. По теореме Вейерштрасса последовательность a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, ... имеет предел.

Числа r_1, r_2, r_3, ..., r_n, ... приближаются к числу α по мере возрастания n. Пределом последовательности a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, ..., a^{r_n}, ... естественно считать число a^α.

Последовательность 10^1, $10^{1,4}$, $10^{1,41}$, ... возрастает и ограничена, например, числом 10^2. Значит, последовательность 10^1, $10^{1,4}$, $10^{1,41}$, ... имеет предел.

Пределом этой последовательности естественно назвать число $10^{\sqrt{2}}$.

Аналогично можно было бы рассмотреть случаи $0 < a < 1$ и $a = 1$. Обобщая высказанные соображения, естественно считать степенью положительного числа $a\,(a > 0)$ с иррациональным показателем α предел последовательности a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, ..., a^{r_n}, ..., где (r_n) — произвольная последовательность рациональных чисел, сходящаяся к числу α. Итак, $a^\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$, где $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} r_n$.

Мы установили смысл понятия степени положительного числа с любым иррациональным показателем. Таким образом, выражение a^x имеет смысл при $a > 0$ для любого действительного показателя x. Можно доказать, что для степеней с любыми действительными показателями сохраняются все свойства, установленные для степеней с рациональными показателями.

▶ Например, докажем свойство I (1).

Дано: $a > 0$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$, $\beta \in \boldsymbol{R}$.

Доказать: $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$.

Доказательство. Пусть (r_n) и (r'_n) — две произвольные последовательности рациональных чисел, сходящиеся соответственно к числам α и β, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \alpha$, а $\lim\limits_{n\to\infty} r'_n = \beta$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(r_n + r'_n) = \alpha + \beta$. По свойству степеней с рациональными показателями $a^{r_n} \cdot a^{r'_n} = a^{r_n + r'_n}$. Применяя теорему о пределе произведения последовательностей, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{r'_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n + r'_n}.$$

Пользуясь введенным определением степени с действительным показателем, получим: $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$, что и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать выполнимость других свойств степени для любых действительных показателей.

Задание. Докажите: $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$, где $\alpha \in \boldsymbol{R}$, $\beta \in \boldsymbol{R}$. ◀

Упражнения

1. Сформулируйте определение степени числа a с натуральным показателем n.

2. Сформулируйте свойства степени с натуральным показателем.

3. Представьте следующие дроби в виде целых выражений:

а) $\dfrac{2ab}{c^{-4}}$; б) $\dfrac{a^3 \cdot b^{-2}}{c \cdot d^{-3}}$; в) $\dfrac{1}{3a^{-2}b^2c^{-1}}$; г) $\dfrac{5}{(a+b)^{-3}}$;

д) $\dfrac{4x^2y^2}{9(x-y)^{-4}}$; е) $\dfrac{7}{3^{-1} \cdot x^{-3} \cdot y^{-p} \cdot z^{-k}}$; ж) $\dfrac{3b^2}{5^{-4} \cdot (a+b)^{-m} \cdot (a-b)^{-k}}$.

4. Выполните действия и ответ запишите с помощью радикалов:

а) $\dfrac{a^{-\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{-\frac{4}{3}}}$; б) $\dfrac{a^{-\frac{3}{2}} \cdot b^{-4} \cdot d^3}{a^{-\frac{5}{3}} \cdot b^{-\frac{3}{4}} \cdot d^{-\frac{4}{3}}}$; в) $\dfrac{(c+d)^{-\frac{4}{5}} \cdot d^{-\frac{1}{2}}}{(c+d)^{-\frac{5}{4}} \cdot d^{\frac{1}{2}}}$.

5. Представьте данные выражения в виде степеней с рациональными показателями:

а) $\dfrac{\sqrt[7]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[5]{a^4} \cdot \sqrt[4]{b^2}}$; б) $\dfrac{\sqrt[4]{a^2} \cdot \sqrt[6]{b^3}}{\sqrt[5]{a^{-4}}}$; в) $\dfrac{\sqrt[3]{(a+b)\,a^2}}{\sqrt[5]{(a+b)\sqrt{a}}}$; г) $\sqrt{a^2\sqrt[4]{a\sqrt{a}}}$.

6. Вычислите:

а) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^0\right)^{-0,5} - 7{,}5 \cdot 4^{-\frac{3}{2}} - (-2)^{-4} + 81^{0,25}$;

б)* $\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{-3} - \left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{10}} : \left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{3}{2}}$;

в)* $\dfrac{1}{5^{\frac{1}{2}}} + \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{6}{7}}\right)^0 : \sqrt{36^{-1}} + \left(9^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} - \left(\sqrt{25^5}\right)^{-\frac{1}{10}}$.

7. Выполните действия:

а) $2^{\sqrt{3}} \cdot 2^{2-\sqrt{3}}$; б) $2^{1+\sqrt{3}} : 2^{\sqrt{3}}$; в) $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{18}}$; г) $6^{\sqrt{5}} \cdot 6^{3-\sqrt{5}} - 5^{3+\sqrt{5}} : 5^{\sqrt{5}} + (2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$; д) $8^{\sqrt{5}} : 4^{\sqrt{5}}$.

8. Упростите выражения:

а) $\left(\left(a^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}(a-x) - \dfrac{a+x}{a^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}}\right) \cdot 2 \cdot (ax)^{-\frac{1}{3}}$;

б) $\dfrac{2 \cdot \sqrt{2{,}5} \cdot (a+b)^{-1}}{\sqrt{10^{-1}}} \cdot \left(\dfrac{\left(a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}}\right)\left(a^{\frac{3}{4}} - b^{\frac{3}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \sqrt{ab}\right)$;

в) $\left(x(1-x)^{-\frac{2}{3}} + \dfrac{x^2}{(1-x)^{\frac{5}{3}}}\right) : (1 - 2x + x^2)^{-1} \cdot (1-x)^{\frac{1}{3}}$;

г)* $\dfrac{a^0+a(a-2)}{\dfrac{1}{a^{-2}}-a+1}:\sqrt{\dfrac{1}{(a+1)^{-2}}}\cdot\left(\dfrac{(a-1)^{-1}}{a^{-3}}-(1-a)^{-1}\right).$

9. Найдите числовое значение выражения:

а) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}$, если $a=\frac{1}{16}$, $b=\frac{1}{81}$;

б)* $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{(a^2-ab)^{\frac{2}{3}}}:\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$, если $a=1{,}2$ и $b=\frac{3}{5}$.

10. Докажите тождество:

а) $\dfrac{1-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{2}{a^{\frac{3}{2}}}+a^{\frac{1}{2}}-\dfrac{a-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}=0;$

б) $\left(\dfrac{3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1}-\left(\dfrac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}=\dfrac{x^2}{2x-1};$

в)* $\left(\dfrac{1}{(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^{-2}}-\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\right)\cdot(ab)^{-\frac{1}{2}}=1.$

§ 79. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Определение. **Функция $y=a^x$, где $a>0$, $x\in R$, называется показательной функцией.**

Например, функции $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=(0{,}3)^x$ являются показательными.

В определении показательной функции указывается, что a — положительное число. Это ограничение вызвано тем, что степень с рациональным показателем определяется только для положительных оснований. Многие процессы (радиоактивный распад, охлаждение тела, изменение атмосферного давления с изменением высоты) математически описываются с помощью показательной функции. Например, колония живых организмов (в частности, бактерий) растет в результате размножения. Если за равные промежутки времени число живых организмов увеличивается в одно и то же число раз, то число N организмов по истечении времени t после начала наблюдения выражается формулой $N=na^t$, где n — число организмов в начальный момент времени, a — постоянная величина. Число $a\,(a>1)$ характеризует быстроту роста данной колонии. Это число зависит от биологического вида организмов и от условий внешней среды. Например, для бактерии, являющейся возбудителем холеры, число a близко к четырем.

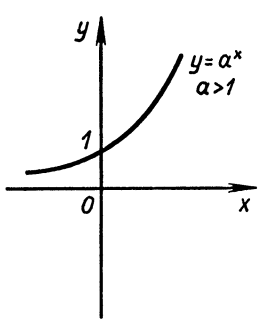


Рис. 188

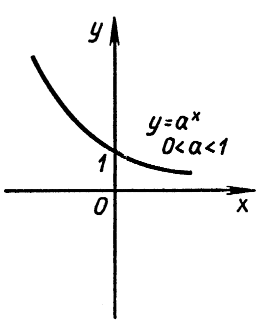


Рис. 189

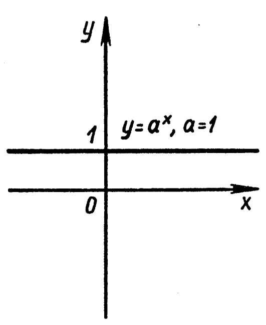


Рис. 190

Из восьмилетней школы вам известны свойства показательной функции. Напомним их.

График показательной функции $y=a^x$ при $a>1$ изображен на рисунке 188, при $0<a<1$ — на рисунке 189, при $a=1$ — на рисунке 190. Изучение функции $y=a^x$ при $a=1$ не представляет интереса, так как в этом случае функция при всех действительных значениях переменной принимает одно и то же значение, равное единице.

Основные свойства функции $y=a^x$

при $a>1$	при $0<a<1$
1. Область определения функции — множество действительных чисел: $D(a^x)=\boldsymbol{R}$.	1. Область определения функции — множество действительных чисел: $D(a^x)=\boldsymbol{R}$.
2. Множество значений функции — множество положительных действительных чисел: $E(a^x)=\boldsymbol{R}_+$.	2. Множество значений функции — множество положительных действительных чисел: $E(a^x)=\boldsymbol{R}_+$.
3. Функция возрастает на всей области ее определения, т. е. если $x_2>x_1$, то $a^{x_2}>a^{x_1}$.	3. Функция убывает на всей области ее определения, т. е. если $x_2>x_1$, то $a^{x_2}<a^{x_1}$.
4. При $x=0$ $a^x=1$, если $x\in\,]-\infty;\ 0[$, то $0<a^x<1$; $x\in\,]0;\ \infty[$, то $a^x>1$.	4. При $x=0$ $a^x=1$, если $x\in\,]-\infty;\ 0[$, то $a^x>1$; если $x\in\,]0;\ \infty[$, то $0<a^x<1$.

Одно из важных свойств показательной функции состоит в ее непрерывности: $\lim\limits_{x\to k}a^x=a^k$. Этот факт мы примем без доказательства.

Пример 1. Сравните с единицей следующие числа: а) $0{,}13^{0{,}5}$; б) $3{,}7^{-0{,}4}$.

Решение. а) Функция $y=0{,}13^x$ убывающая (см. рис. 189). Если $x>0$, то $y<1$, поэтому $0{,}13^{0{,}5}<1$.

б) Функция $y=3{,}7^x$ возрастающая (см. рис. 188). Если $x<0$, то $y<1$, поэтому $3{,}7^{-0{,}4}<1$.

Пример 2. Докажите: если значения аргумента показательной функции образуют арифметическую прогрессию, то соответствующие им значения показательной функции образуют геометрическую прогрессию.

Решение. Пусть у показательной функции $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$ аргумент принимает значения, образующие арифметическую прогрессию: x_0, x_0+d, $x_0+2d, \ldots$, $x_0+(k-1)d, \ldots$, тогда соответствующие значения показательной функции образуют последовательность a^{x_0}, a^{x_0+d}, a^{x_0+2d}, …, $a^{x_0+(k-1)d}$, … . Найдем отношение двух любых соседних членов этой последовательности:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{a^{x_0+nd}}{a^{x_0+(n-1)d}}=a^d,$$

отсюда

$$y_{n+1}=y_n a^d.$$

По определению последовательность $(a^{x_0+(k-1)d})$ является геометрической прогрессией со знаменателем a^d.

На рисунке 191 приведен график функции $y=2^x$ для $x\geqslant 0$, а на рисунке 192 — график функции $y=2^x$, $x\in N$, т. е. изображение членов геометрической прогрессии 2, 2^2, $2^3, \ldots$, $2^n, \ldots$ $(b=2$, $q=2)$.

Из рассмотренного примера следует, что показательной функцией и соответствующей геометрической прогрессией можно математически описать один и тот же процесс изменения некоторых величин, с той лишь разницей, что показательная функция описывает этот процесс непрерывно, а геометрическая прогрессия — дискретно (учитываются лишь отдельные состояния этого процесса).

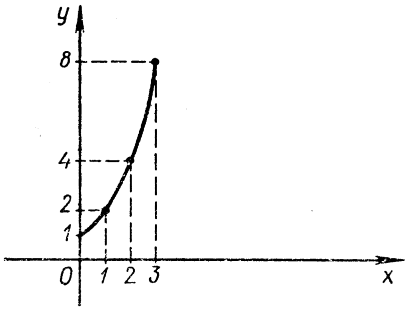


Рис. 191

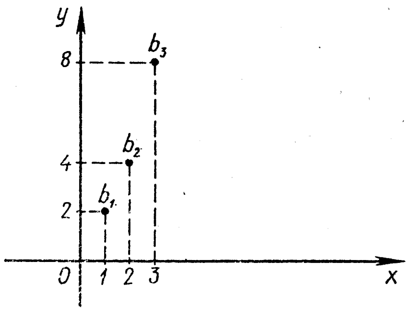


Рис. 192

Упражнения

1. Сформулируйте определение показательной функции.

2. Приведите пример процесса, математически описываемого с помощью показательной функции.

3. Постройте график функции $y=3^x$. С помощью графика найдите:

а) значения аргументов, при которых значения функции равны 0,5; 1; 3,7;

б) решения неравенств $3^x<1$ и $3^x>3$.

4. Постройте график функции $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$. С помощью построенного графика найдите:

а) значения аргумента, при которых значения функции равны 0,5; 1; 3,7;

б) решения неравенств $\left(\frac{1}{3}\right)^x<1$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^x>3$.

5. В одной системе координат постройте графики функций $y=3^x$, $y=2^x$, $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$. Как изменяются графики с уменьшением основания?

6. Опишите: а) общие свойства функций $y=2^x$ и $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$; б) различные свойства функций $y=2^x$ и $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

7. Пользуясь свойствами показательной функции, сравните числа:

а) $\left(\frac{5}{7}\right)^{0{,}8}$ и 1; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ и 1; в) $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ и $\left(\frac{4}{5}\right)^5$; г) $(0{,}4)^{-2}$ и $(0{,}4)^3$; д) $(2{,}56)^0$ и $(0{,}312)^0$; е) $(1{,}7)^{-3}$ и $(1{,}7)^{-2}$; ж) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2{,}7}$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{5{,}2}$; з) $\left(\frac{8}{5}\right)^{-3}$ и $\left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$; и) $(0{,}2)^{-6{,}5}$ и $5^{5{,}6}$; к) $3^{-1{,}2}$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{2{,}8}$; л) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^{-1}$ и 1.

8. Какие значения может принимать основание показательной функции $y=a^x$, если: а) $a^{-\frac{2}{3}}>a^{\frac{5}{3}}$; б) $a^{\frac{7}{8}}>a^{\frac{11}{8}}$; в) $a^{\frac{3}{5}}<a^{0{,}6}$; г) $a^{-\frac{1}{3}}<a^{0{,}2}$; д) $a^{-2}>a^{-0{,}6}$?

9. Сравните числа α и β, если:

а) $1{,}34^\alpha<1{,}34^\beta$; б) $\sqrt{0{,}364^\alpha}<\sqrt{0{,}364^\beta}$; в) $\sqrt[20]{1{,}6^\alpha}<\sqrt[20]{1{,}6^\beta}$.

10. Сравните с единицей число α, если $\alpha^{0{,}4}<\alpha^{0{,}5}$.

11. Сравните числа: а) $\pi^{1{,}5}$ и $3{,}14^{1{,}5}$; б) $e^{-0{,}8}$ и $2{,}72^{-0{,}8}$.

12. Существует ли у функции $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$: а) наибольшее значение; б) наименьшее значение?

13. Постройте графики функций $y=2^{|x|}$ и $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$. Существуют ли у данных функций: а) наибольшее значение; б) наименьшее значение?

14. Установите, как изменяется функция $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ с возрастанием аргумента от -3 до 0. Вычислите значение y при $x=-\frac{1}{2}$.

15. Найдите область определения функций:

а) $y=5^{\frac{1}{3-x}}$; б) $f(x)=\left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{x^2-4}}$; в) $z(x)=\frac{7}{4^{x^2}}$.

16. Найдите множество значений функций:

а) $y=2^{|x|}$; б) $y=-2^x$; в) $y=|3^x-3|$.

17*. Исходя из графика функции $y=10^x$, постройте график функции:

а) $y=10^x+2$; б) $y=10^x-2$; в) $y=10^{x-1}$;
г) $y=10^{x+2}$; д) $y=-10^x$; е) $y=10^{|x|}$.

18. Докажите, что последовательность значений функции $y=\left(\frac{1}{7}\right)^x$ при натуральных значениях аргумента составляет геометрическую прогрессию.

§ 80. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Показательным называют уравнение, содержащее переменную в показателе степени, например $2^x=4$; $3^{x-1}=2x$; $2^{|x|}=5$; $3^x=-9$.

Рассмотрим некоторые способы решения показательных уравнений.

1. *Приведение показательных уравнений к виду* $a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}$. Известно, что показательная функция $y=a^x$ при $a>0$ и $a\neq 1$ возрастает или убывает, поэтому каждое свое значение она принимает только при одном значении аргумента. Из равенства $a^u=a^v$ следует равенство $u=v$. Этим утверждением руководствуются при решении показательных уравнений вида $a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}$.

Пример 1. Решите уравнения: а) $5^{3x-2}=5^{10-x}$; б) $\left(\frac{7}{2}\right)^{x^2}=\left(\frac{2}{7}\right)^{4-5x}$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}$; г) $2^x\cdot 5^x=0{,}1\cdot(10^{x-1})^3$.

Решение. а) $5^{3x-2}=5^{10-x}$, $3x-2=10-x$, $4x=12$, $x=3$.

б) $\left(\frac{7}{2}\right)^{x^2}=\left(\frac{2}{7}\right)^{4-5x}$, $\left(\frac{7}{2}\right)^{x^2}=\left(\frac{7}{2}\right)^{5x-4}$, $x^2=5x-4$, $x^2-5x+4=0$, $x=1$ или $x=4$.

в) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}$, $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8}\right)^x=\left(\frac{3}{4}\right)^3$, $\left(\frac{3}{4}\right)^x=\left(\frac{3}{4}\right)^3$, $x=3$.

г) $2^x\cdot 5^x=0{,}1\cdot(10^{x-1})^3$, $10^x=10^{-1}\cdot 10^{3x-3}$, $10^x=10^{3x-4}$, $x=3x-4$, $x=2$.

К уравнениям рассмотренного выше типа приводятся уравнения вида $a^{f(x)}=1$ $(a>0;\ a\neq 1)$ путем представления единицы в виде степени числа с нулевым показателем: $a^{f(x)}=a^0$.

Пример 2. Решите уравнения: а) $17^{x^2-5x+6}=1$; б) $7^{1+|x|}=1$.

Решение. а) $17^{x^2-5x+6}=1$, $17^{x^2-5x+6}=17^0$, $x^2-5x+6=0$, $x=2$ или $x=3$.

б) $7^{1+|x|}=1$, $7^{1+|x|}=7^0$, $1+|x|=0$, $|x|=-1$. Решений нет.

Задание 1. Решите уравнения: а) $3^{2x-1}=9$; б) $2^{x^2-4}=1$.

Пример 3. Решите уравнения: а) $14^{\frac{x}{7}}=26$; б) $2^x\cdot 3^{x-1}\cdot 5^{x+2}=4$.

Решение. а) $14^{\frac{x}{7}}=26$, $\frac{x}{7}=\log_{14}26$, $x=7\log_{14}26$.

б) $2^x\cdot 3^{x-1}\cdot 5^{x+2}=4$, $2^x\cdot\frac{3^x}{3}\cdot 5^x\cdot 25=4$, $(2\cdot 3\cdot 5)^x=\frac{12}{25}$, $30^x=\frac{12}{25}$, $x=\log_{30}\frac{12}{25}=\log_{30}0{,}48$.

2. *Вынесение общего множителя за скобки.*

Пример 4. Решите уравнения: а) $3^x-2\cdot 3^{x-2}=63$; б) $5^{2x-1}-5^{2x}+2^{2x}+2^{2x+2}=0$; в) $2^{3\sqrt{x}+2}-2^{3\sqrt{x}+1}=12+2^{3\sqrt{x}-1}$.

Решение. а) $3^x-2\cdot 3^{x-2}=63$, $3^{x-2}(3^2-2)=63$, $3^{x-2}\cdot 7=63$, $3^{x-2}=3^2$, $x=4$.

б) $5^{2x-1}-5^{2x}+2^{2x}+2^{2x+2}=0$, $2^{2x}+2^{2x+2}=5^{2x}-5^{2x-1}$, $2^{2x}(1+2^2)=5^{2x}(1-5^{-1})$, $2^{2x}\cdot 5=5^{2x}\cdot\frac{4}{5}$, $\frac{2^{2x}}{5^{2x}}=\frac{4}{25}$, $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}=\left(\frac{2}{5}\right)^2$, $2x=2$, $x=1$.

в) $2^{3\sqrt{x}+2}-2^{3\sqrt{x}+1}=12+2^{3\sqrt{x}-1}$, $2^{3\sqrt{x}+2}-2^{3\sqrt{x}+1}-2^{3\sqrt{x}-1}=12$, $2^{3\sqrt{x}-1}(2^3-2^2-1)=12$, $2^{3\sqrt{x}-1}\cdot 3=12$, $2^{3\sqrt{x}-1}=4$, $2^{3\sqrt{x}-1}=2^2$, $3\sqrt{x}-1=2$, $\sqrt{x}=1$, $x=1$.

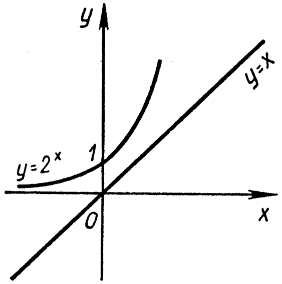


Рис. 193

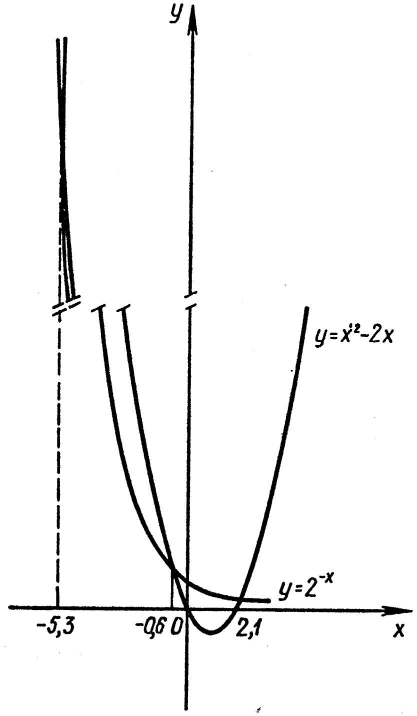


Рис. 194

3. *Приведение показательного уравнения к квадратному.*

Пример 5. Решите уравнения: а) $7^{2x}-8\cdot 7^{x}+7=0$; б) $2^{2+x}-2^{2-x}=15$; в) $2^{2x}+6^{x}=2\cdot 3^{2x}$.

Решение. а) $7^{2x}-8\cdot 7^{x}+7=0$. Обозначим 7^{x} через t, тогда получим: $t^{2}-8t+7=0$, $t=1$ или $t=7$.

1) $7^{x}=1$; $7^{x}=7^{0}$; $x=0$.
2) $7^{x}=7$; $x=1$.

Ответ: 0; 1.

б) $2^{2+x}-2^{2-x}=15$, $2^{2}\cdot 2^{x}-\frac{2^{2}}{2^{x}}=15$. Замена: $2^{x}=t$,

$4t-\frac{4}{t}=15$, $4t^{2}-15t-4=0$,

$t=4$ или $t=-\frac{1}{4}$.

1) $2^{x}=4$, $x=2$.

2) $2^{x}=-\frac{1}{4}$ — решений нет.

Ответ: 2.

в) $2^{2x}+6^{x}=2\cdot 3^{2x}$, $2^{2x}+2^{x}\cdot 3^{x}-2\cdot 3^{2x}=0$, $\frac{2^{2x}}{3^{2x}}+\frac{2^{x}\cdot 3^{x}}{3^{2x}}-\frac{2\cdot 3^{2x}}{3^{2x}}=0$,

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+\left(\frac{2}{3}\right)^{x}-2=0$. Замена: $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=t$, $t^{2}+t-2=0$, $t=-2$ или $t=1$.

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=-2$ — решений нет.

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{0}$, $x=0$.

Ответ: 0.

4. *Графическое решение показательных уравнений.*

Пример 6. Решите графически уравнения: а) $2^{x}=x$; б) $2^{-x}=x^{2}-2x$.

Решение. а) Строим графики функций $y=2^{x}$ и $y=x$ (рис. 193). Графики функций $y=2^{x}$ и $y=x$ не имеют общих точек. Уравнение $2^{x}=x$ решений не имеет.

б) Строим графики функций $y=2^{-x}$ и $y=x^{2}-2x$ (рис. 194). Графики функций $y=2^{-x}$ и $y=x^{2}-2x$ пересекаются в трех точках, абсциссы которых $x_1\approx -0{,}6$, $x_2\approx 2{,}1$ и $x_3\approx -5{,}3$ являются решениями данного уравнения.

Упражнения

1. Приведите примеры показательных уравнений, имеющих только: а) одно решение; б) два решения. Приведите пример показательного уравнения, не имеющего решения.

2. Расскажите об известных вам способах решения показательных уравнений и покажите их применение на примерах.

3. Решите показательные уравнения приведением их к виду $a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}$:

а) $6^{3-x}=216$; б) $2^{3x}=(512)^{\frac{1}{3x}}$;
в) $5^{\frac{x}{\sqrt{2}}}=625$; г) $\left(\frac{5}{7}\right)^{5x-7}=\left(-\frac{7}{5}\right)^{7x-5}$;
д) $3^{x}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}=\left(\frac{1}{27}\right)^{x}$; е) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{9}{16}$;
ж) $2^{x^{2}-6x-2,5}=16\sqrt{2}$; з) $32^{\frac{x+5}{x-7}}=0{,}25\cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$;
и)* $(0{,}11)^{x^{3}-5}=0{,}001331$; к) $2^{x^{2}-3}\cdot 5^{x^{2}-3}=0{,}01\cdot(10^{1-x})^{3}$,
л) $0{,}6^{x}\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{x^{2}-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^{3}$;
м) $5^{\frac{x}{\sqrt{x}+2}}\cdot 0{,}2^{\frac{4}{\sqrt{x}+2}}=125^{x-4}\cdot 0{,}04^{x-2}$.

4. Решите показательные уравнения:

а) $3^{x}=7$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}=5$; в) $10^{x}=3\cdot 10^{2}$;
г) $2^{x}=21\cdot 3^{x-1}$; д) $5^{x+1}=10\cdot 7^{x}$; е) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$;
ж) $5^{x+2}=7^{2x}$; з) $2^{3x}=2^{2x}\cdot 12$.

5. Решите показательные уравнения способом вынесения общего множителя за скобки:

а) $2^{x}-2^{x-2}=3$; б) $3^{x}-3^{x-2}=8$;
в) $2\cdot 3^{x+3}-5\cdot 3^{x-2}=1443$; г) $10^{x}+10^{x-1}=0{,}11$;
д) $5^{x-4}-5^{x-5}-2\cdot 5^{x-6}=2\cdot 3^{x-4}$;
е) $\sqrt{3^{x-54}}-7\sqrt{3^{x-58}}=162$;
ж) $5^{2x}-7^{x}-5^{2x}\cdot 35+7^{x}\cdot 35=0$;
з) $4^{x}-3^{x-0,5}=3^{x+0,5}-2^{2x-1}$;
и) $2^{x}+2^{x+1}+2^{x+2}+2^{x+3}=3^{x}+3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}$;
к) $2^{x^{2}-1}-3^{x^{2}}=3^{x^{2}-1}-2^{x^{2}+2}$.

6. Решите показательные уравнения способом приведения к квадратным уравнениям:

а) $3^{2x}-30\cdot 3^x+81=0$; б) $7^{2x}-6\cdot 7^x+5=0$;
в) $4^x+2^{x+1}=80$; г) $2^{2x-1}+2^{x+2}=64$;
д) $4^x-2^{x+3}+16=0$; е) $5^{4\sqrt{x}}-14\cdot 5^{2\sqrt{x}}-275=0$;
ж) $2^{2+x}-2^{2-x}=6$; з) $2\cdot 7^{3x}-5\cdot 49^{3x}+3=0$;
и) $4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}$; к) $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}-1}=6$;
л) $3^{2x+4}+45\cdot 6^x-9\cdot 2^{2x+2}=0$; м) $2^{2x+1}+3^{2x+1}=5\cdot 6^x$;
н)* $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=4$;
о)* $(\sqrt{4-\sqrt{15}})^x+(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x=8$.

7. Решите графически уравнения:

а) $2^{x-2}=1$; б) $2^x=x+2$; в) $3^x=\frac{1}{3}x^2$;
г) $2^x=x^2$; д) $2^x=\frac{1}{x}$; е) $3^{|x|}=6$.

§ 81. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

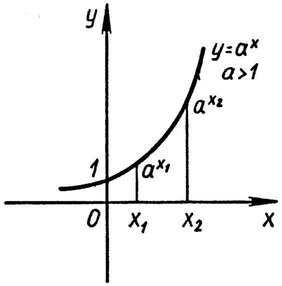


Рис. 195

Простейшие показательные неравенства вида $a^x>b$ или $a^x<b$ решаются на основе известных свойств показательной функции $y=a^x$:

при $a>1$, если $a^{x_2}>a^{x_1}$, то $x_2>x_1$ (рис. 195),

при $0<a<1$, если $a^{x_2}<a^{x_1}$, то $x_2>x_1$ (рис. 196).

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решите неравенства: а) $3^{6-x}>1$; б) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}<\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$; в) $6^{|x|-1}\leqslant 216$.

Решение. а) $3^{6-x}>1$, $3^{6-x}>3^0$, $6-x>0$, $x<6$.

б) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}<\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$, $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}<\left(\frac{3}{7}\right)^{-7x+3}$, $3x-7>-7x+3$, $10x>10$, $x>1$.

в) $6^{|x|-1}\leqslant 216$, $6^{|x|-1}\leqslant 6^3$, $|x|-1\leqslant 3$, $|x|\leqslant 4$, $-4\leqslant x\leqslant 4$.

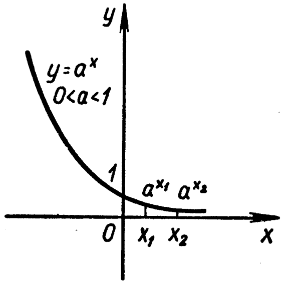


Рис. 196

Пример 2. Решите неравенство $2^x-2^{x-2}\leqslant 3$.

Решение. $2^x-2^{x-2}\leqslant 3$, $2^{x-2}(2^2-1)\leqslant 3$, $2^{x-2}\leqslant 1$, $2^{x-2}\leqslant 2^0$, $x-2\leqslant 0$, $x\leqslant 2$.

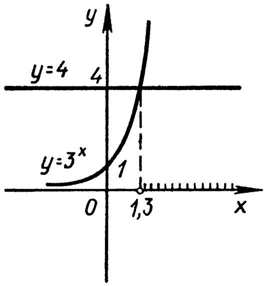


Рис. 197

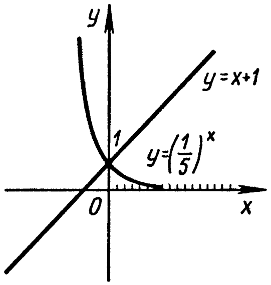


Рис. 198

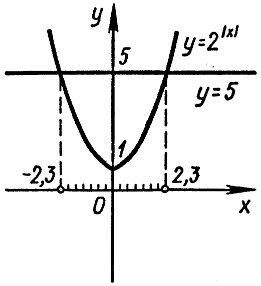


Рис. 199

Пример 3. Решите неравенство $5^{2x-1}+5^{x+1}>250$.

Решение. $5^{2x-1}+5^{x+1}>250$, $\frac{5^{2x}}{5}+5^x\cdot 5>250$, $5^{2x}+25\cdot 5^x-1250>0$.

Замена: $5^x=y$, $y^2+25y-1250>0$, $(y+50)(y-25)>0$, $y<-50$ или $y>25$, $5^x>5^2$, $x>2$.

Пример 4. Решите графически неравенства: а) $3^x>4$; б) $\left(\frac{1}{5}\right)^x\leqslant x+1$; в) $2^{|x|}<5$.

Решение. а) На рисунке 197 изображены графики функций $y=3^x$ и $y=4$. Находим приближенно абсциссу точки их пересечения: $x\approx 1{,}3$. Из рисунка видно, что $3^x>4$, если $x>1{,}3$.

б) Из рисунка 198 следует, что решение неравенства $\left(\frac{1}{5}\right)^x\leqslant x+1$ есть промежуток $x\geqslant 0$.

в) Из рисунка 199 следует, что решение неравенства $2^{|x|}<5$ есть промежуток $-2{,}3<x<2{,}3$.

Упражнения

1. При каких значениях a из неравенства $a^{x_2}>a^{x_1}$ следует неравенство $x_2>x_1$?

2. При каких значениях a из неравенства $a^{x_2}>a^{x_1}$ следует неравенство $x_2<x_1$?

3. Найдите множества решений неравенств:

а) $5^x<625$; б) $3^{-x+2}\geqslant 27$;
в) $2^{x+1}<32$; г) $\sqrt{5^x}>\sqrt[3]{25}$;
д) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-3}\leqslant\left(\frac{4}{3}\right)^{2x+5}$; е) $(0{,}25)^{2-x}>\frac{256}{2^{x+3}}$;
ж) $1000\cdot(0{,}1)^{\frac{1}{x}}\leqslant 100^x$; з)* $0{,}3^{2+4+6+\ldots+2n}>0{,}3^{72}$, $n\in N$.

4. Найдите множества решений неравенств:

а) $7^x<3$; б) $3^{x-1}\geqslant 27\cdot 5^x$;

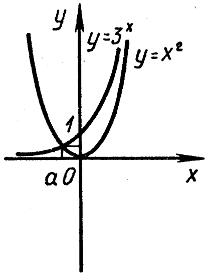


Рис. 200

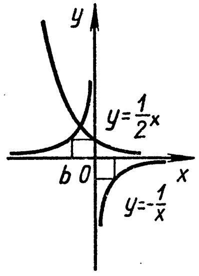


Рис. 201

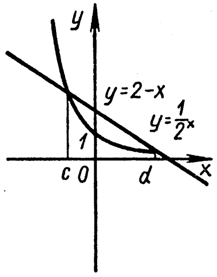


Рис. 202

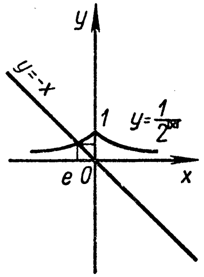


Рис. 203

в) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x} \leqslant 3 \cdot 25^x$; г) $8 \cdot 2^{x-5} \geqslant 6^{2x+1}$;

д) $(0{,}12)^{3x+1} < 27^x \cdot 8$.

5. Методом вынесения общего множителя за скобки найдите множества решений неравенств:

а) $2^{x+2} - 2^x > 96$; б) $7^x \geqslant 7^{x-1} + 6$;
в) $5^{x+1} < 24 + 5^{x-1}$; г) $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} \leqslant 315$;
д) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$.

6. Решите неравенства:

а) $7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 > 0$; б) $5^{2x+1} > 5^{5x+4}$;
в) $3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} < 29$; г) $9^x - 6 \cdot 3^x < 27$.

7. Ниже на рисунках изображены графики функций: $y = x^2$ и $y = 3^x$ (рис. 200); $y = -\frac{1}{x}$ и $y = \frac{1}{2^x}$ (рис. 201); $y = 2 - x$ и $y = \frac{1}{2^x}$ (рис. 202); $y = \frac{1}{2^{|x|}}$ и $y = -x$ (рис. 203), где a, b, c, d, e — абсциссы точек пересечения графиков. По соответствующим рисункам установите множество решений каждого из неравенств:

а) $3^x > x^2$; б) $3^x \leqslant x^2$; в) $\frac{1}{2^x} \geqslant -\frac{1}{x}$; г) $\frac{1}{2^x} < -\frac{1}{x}$;

д) $\frac{1}{2^x} > 2 - x$; е) $\frac{1}{2^x} < 2 - x$; ж) $\frac{1}{2^{|x|}} \leqslant -x$; з) $\frac{1}{2^{|x|}} \geqslant -x$.

8. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = \sqrt{3^{x+1} - 27}$; б) $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{0{,}008^x - 125}}$;

в) $y = \sqrt{x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1}}$; г) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{\sin x} - 1}}$.

§ 82. ПРОИЗВОДНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Прежде чем найти производную показательной функции, сделаем два важных предварительных замечания.

График показательной функции $y = a^x$ проходит через точку (0; 1). Пусть α — величина угла, образованного касательной к графику функции $y = a^x$ в точке (0; 1) с положительным направлением оси абсцисс. Можно показать, что величина этого угла зависит от значения основания a. Например, вычислено, что при $a = 2$ величина угла α приближенно равна 34° (рис. 204), а при $a = 3$ $\alpha \approx 47°$ (рис. 205). Если основание a показательной функции $y = a^x$ возрастает от 2 до 3, то величина угла α возрастает и принимает значения от 34° до 47°. Можно доказать, что найдется такое значение a, при котором касательная, проведенная к графику функции $y = a^x$ в точке (0; 1), образует с положительным направлением оси абсцисс угол 45° (рис. 206). Такое значение a принято обозначать буквой e. e — число иррациональное, $e = 2{,}718281828459\ldots$. Оно равно пределу $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Если основанием логарифмов служит число e, то такие логарифмы называют натуральными: $\log_e x = \ln x$ (запись $\ln x$ читают: «натуральный логарифм числа x»). Натуральные логарифмы (логарифмы с основанием e) широко применяются в математике и практике.

Таким образом, касательная к графику функции $f(x) = e^x$ в точке (0; 1) образует с положительным направлением оси абсцисс угол, равный 45°.

В соответствии с геометрическим смыслом производной данный вывод означает, что значение производной функции $f(x) = e^x$ в точке $x = 0$ равно $\operatorname{tg} 45° = 1$. Таким образом, $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - e^0}{\Delta x} = 1$.

Выведем теперь формулу производной функции $f(x) = e^x$. Будем пользоваться планом нахождения производной функции (см. § 21).

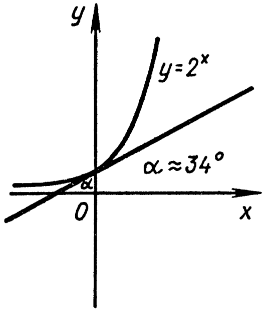


Рис. 204

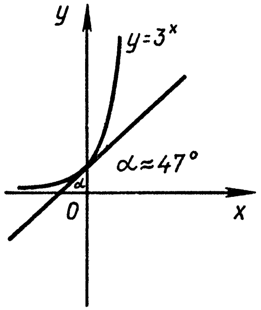


Рис. 205

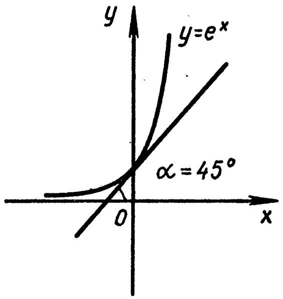


Рис. 206

1) Пусть аргумент x получает приращение Δx.

2) Находим приращение функции Δf:

$$\Delta f = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x (e^{\Delta x} - 1).$$

3) Находим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{e^x (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}.$$

4) Вычисляем предел отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, считая x постоянной, а Δx переменной, стремящейся к нулю:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

Таким образом, производная функции e^x равна самой функции:

$$(e^x)' = e^x.$$

Найдем теперь производную показательной функции $f(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$. Исходя из геометрических представлений, можно предположить, что эта функция дифференцируема, так как в любой точке графика существует не вертикальная касательная.

Воспользовавшись основным логарифмическим тождеством ($b^{\log_b a} = a$, см. § 84), любое число a можно представить в виде $a = e^{\ln a}$. Поэтому показательную функцию можно представить в виде $a^x = e^{x \cdot \ln a}$.

Воспользуемся правилом нахождения производной сложной функции:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a.$$

Учитывая, что $e^{x \ln a} = a^x$, получим:

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

Производная показательной функции равна произведению этой функции на натуральный логарифм ее основания.

Решим несколько примеров на применение производной показательной функции.

Пример 1. Найдите производную функции:

а) 5^x; б) e^{-5x}; в) e^{3-2x}; г) $(0{,}3)^{\sin 2x}$.

Решение. По формуле производной показательной функции и правилу дифференцирования сложной функции имеем:

а) $(5^x)' = 5^x \ln 5$;

б) $(e^{-5x})' = e^{-5x}(-5x)' = -5e^{-5x}$;

в) $(e^{3-2x})' = e^{3-2x} \cdot (3-2x)' = -2e^{3-2x}$;

г) $((0{,}3)^{\sin 2x})' = 0{,}3^{\sin 2x} \cdot \ln 0{,}3 \cdot (\sin 2x)' = 2 \cdot 0{,}3^{\sin 2x} \cdot \ln 0{,}3 \cdot \cos 2x$.

Пример 2. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = e^{-x}$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

Решение. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в произвольной точке $(x_0;\ y_0)$ имеет вид: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. По условию $x_0 = -1$, поэтому $y_0 = e^{-(-1)} = e$. $f'(x) = (e^{-x})' = -e^{-x}$, тогда $f'(-1) = -e$. Подставляя найденные значения x_0, y_0, $f'(x_0)$ в уравнение касательной, получим уравнение искомой касательной:

$$y - e = -e(x + 1),\quad y = -ex.$$

Упражнения

1. Расскажите, как можно ввести число e.

2. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = e^x$ в точке $(0;\ 1)$.

3. Какие логарифмы называют натуральными? Найдите: $\ln e$; $\ln e^3$; $\ln \frac{1}{e}$; $\ln \sqrt{e}$.

4. Составьте план вывода формулы производной функции $y = e^x$.

5. Составьте план вывода формулы производной функции $y = a^x$.

6. Найдите производную показательной функции $y = a^x$, если ее основание a равно: а) $a = e$; б) $a = 2$; в) $a = \frac{1}{3}$; г) $a = \pi$.

7. Вычислите производную функции:

а) 5^{3x}; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}$; в) $e^{2x} + 3^{-x}$; г) $x \cdot 2^{\sin x}$; д) $\frac{x}{3^{2x}}$;

е) $\sqrt{x}(0{,}5^x + 1)$; ж) $\frac{1}{2\pi}\cos\frac{x}{3} - e^{-7x}$; з) $\operatorname{tg} e^{x+1}$; и)* $\frac{2^{\frac{x}{4}}}{1 - \sin^3 7x}$.

8. Вычислите значения производных функций в точке $x = 0$:

а) $y(x) = 3^{x^2-5x+8}$; б) $z(x) = 2^{2x} \cdot \sqrt{2 - 2^{2x}}$; в) $h(x) = \frac{3^x}{\sqrt{1 + 3^x}}$.

9. Найдите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если: а) $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 1$; б) $f(x) = 2^x$, $x_0 = -1$; в)* $y = x^2 \cdot e^{-x}$, $x_0 = 1$.

10. Найдите величину угла между положительным направлением оси Ox и касательной к графику функции $y = e^{-x} - e^{-2x}$ в точке с абсциссой $x = 0$.

§ 83. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Показательная функция $y = a^x$ возрастает или убывает при $a > 0$ и $a \neq 1$ и непрерывна на множестве всех действительных чисел. Эта функция обратима

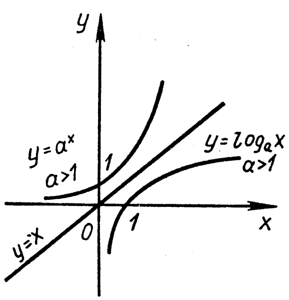


Рис. 207

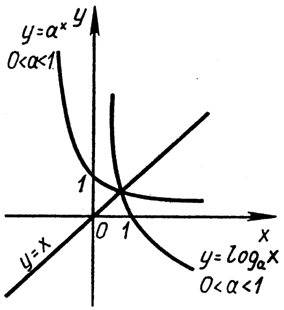


Рис. 208

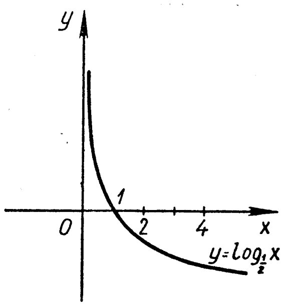


Рис. 209

Определение. **Функция, обратная показательной, называется логарифмической.**

Логарифмическая функция обозначается так: $y=\log_a x$. $D(y)=]0;\ \infty[$; $E(y)=\boldsymbol{R}$. Известно, что графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y=x$. На рисунке 207 схематично изображены графики функций $y=a^x$ и $y=\log_a x$ при $a>1$, а на рисунке 208 графики этих функций при $0<a<1$.

Свойства функции $y=\log_a x$

при $a>1$	при $0<a<1$
1. Область определения функции — множество положительных чисел: $D(\log_a x)=\boldsymbol{R}_+$.	1. Область определения функции — множество положительных чисел: $D(\log_a x)=\boldsymbol{R}_+$.
2. Множество значений функции — множество действительных чисел: $E(\log_a x)=\boldsymbol{R}$, при этом каждое значение принимается функцией только при единственном значении аргумента.	2. Множество значений функции — множество действительных чисел: $E(\log_a x)=\boldsymbol{R}$, при этом каждое значение принимается функцией только при единственном значении аргумента.
3. Функция возрастает на всей области ее определения: если $x_2>x_1$, то $\log_a x_2>\log_a x_1$.	3. Функция убывает на всей области ее определения: если $x_2>x_1$, то $\log_a x_2<\log_a x_1$.
4. Если $x\in]0;\ 1[$, то $\log_a x<0$; если $x=1$, то $\log_a x=0$; если $x\in]1;\ \infty[$, то $\log_a x>0$.	4. Если $x\in]0;\ 1[$, то $\log_a x>0$; если $x=1$, то $\log_a x=0$; если $x\in]1;\ \infty[$, то $\log_a x<0$.

Важным свойством логарифмической функции $y=\log_a x$ является ее непрерывность на всей области определения.

Задание. Постройте график функции $y=3^{-x}$ и ей обратной функции. Расскажите о свойствах этих функций.

Упражнения

1. На основании каких свойств показательной функции можно утверждать, что она обратима?

2. Запишите функцию, обратную функции:

а) $y=2^x$; б) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$; в) $y=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$.

3. На рисунке 209 изображен график функции $y=\log_{\frac{1}{2}} x$. Найдите по графику значения функции при следующих значениях аргумента: $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2; 4.

4. Сформулируйте свойства логарифмической функции.

5. Объясните, на основании какого свойства логарифмической функции можно утверждать, что: а) $\log_2 5>0$; б) $\log_{\frac{1}{2}} 5<0$; в) $\ln 3>0$; г) $\ln\frac{1}{2}<0$; д) $\log_3 7>\log_3 5$; е) $\log_{0,3} 7<\log_{0,3} 5$.

6. Используя свойства логарифмической функции, сравните числа:

а) $\log_3 4$ и $\log_3 6$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 7$ и $\log_{\frac{1}{3}} 9$;

в) $\log_6 5$ и $\log_8 5$; г) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ и $\log_{\frac{1}{4}} 3$.

7. Решите неравенства:

а) $\log_\pi 3<\log_\pi x$; б) $\log_{0,8} 5>\log_{0,8} x$.

8. Установите знак выражения:

а) $\log_{0,8} 4\cdot\log_{\frac{1}{2}} 5$; б) $\log_3 10-2$; в) $\log_{0,2} 18-\log_{0,2} 17$.

9. Докажите, что графики функций $y=\log_3 x$ и $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ симметричны относительно оси абсцисс.

10. Найдите области определения функций:

а) $y=\log_a(x+1)$; б) $y=\log_a(x-1)$;

в) $y=\log_a(-2x)$; г) $y=\log_a x^2$;

д) $y=\log_a(4-x^2)$; е) $y=\log_a(3x^2+1)$;

ж) $y=\log_a|x|$; з) $y=\log_a\sqrt{x+1}$;

и) $y=\log_{0,3}(5x-x^2-6)$.

11. Для каких значений x из промежутка $[0;\ 2\pi]$ имеют смысл выражения:

а) $\log_{\frac{1}{2}}(\sin x)$; б) $\log_3(\operatorname{tg} x)$; в) $\log_2(\cos x)$; г) $\log_{\frac{1}{3}}(\operatorname{ctg} x)$?

12. Постройте графики функций:

а) $y=\log_3 x+1$; б) $y=\log_3 x-1$; в) $y=\log_3(x+1)$;

г) $y=\log_3(x-1)$; д) $y=|\log_3 x|$; е) $y=\log_3|x|$.

13. Какое заключение можно сделать об основании логарифма, если при любом x из области определения функции имеет место неравенство:

а) $\log_a(x^2+3) > \log_a x$; б) $\log_a(x^2+3) < \log_a x$?

§ 84*. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

Напомним, что логарифмом числа N по основанию $a (a > 0, a \neq 1)$ называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число N: если $a^x = N$, то $\log_a N = x$.

Например, $\log_5 125 = 3$, так как $5^3 = 125$;
$\log_{\sqrt{3}} 3 = 2$, так как $(\sqrt{3})^2 = 3$;
$\log_{0,5} 16 = -4$, так как $(0,5)^{-4} = 16$.

Из определения логарифма следует основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a N} = N$. Согласно этому тождеству: $3^{\log_3 5} = 5$; $2^{\log_2 0,7} = 0,7$; $7^{2\log_7 8} = (7^{\log_7 8})^2 = 8^2 = 64$.

Задание 1. Найдите x, если: а) $\log_{0,1} x = -1$; б) $\log_x 216 = 3$; в) $\log_3 \frac{1}{27} = x$.

Задание. 2. Вычислите: а) $2^{\log_2 32}$; б) $4^{1+\log_4 2}$; в) $10^{\log_{10} 0,01 - 2}$.

Сформулируем основные свойства логарифмов.

Теорема 1. ***Логарифм произведения двух положительных чисел по основанию $a (a > 0, a \neq 1)$ равен сумме логарифмов множителей по тому же основанию:***

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \text{ где } x_1 > 0 \text{ и } x_2 > 0.$$

Доказательство. Обозначим: $\log_a x_1 = y_1$, $\log_a x_2 = y_2$. Тогда по определению логарифма можно записать:

$$x_1 = a^{y_1} \qquad (1),$$

$$x_2 = a^{y_2} \qquad (2).$$

Перемножим почленно равенства (1) и (2): $x_1 \cdot x_2 = a^{y_1+y_2}$. По определению логарифма получим:

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = y_1 + y_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

Теорема доказана.

Пример 1. Дано: $\log_5 3 = a$, $\log_5 7 = b$. Вычислите: $\log_5 21$.

Решение. $\log_5 21 = \log_5(3 \cdot 7) = \log_5 3 + \log_5 7 = a + b$.

Можно обобщить теорему 1 на случай любого конечного числа множителей:

$$\log_a(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \ldots$$
$$\ldots + \log_a x_n, \text{ где } x_n > 0,\ n \in N.$$

Теорема 2. ***Логарифм частного двух положительных чисел по основанию $a (a > 0, a \neq 1)$ равен разности логарифмов числителя и знаменателя по тому же основанию:***

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2, \text{ где } x_1 > 0 \text{ и } x_2 > 0.$$

Теорему 2 докажите самостоятельно, разделив почленно равенство (1) на равенство (2).

Пример 2. Дано: $\log_2 10 = a$. Найдите $\log_2 5$.

Решение. $\log_2 5 = \log_2 \frac{10}{2} = \log_2 10 - \log_2 2 = a - 1$.

Теорема 3. ***Логарифм степени x^α по основанию $a (a > 0, a \neq 1)$ равен произведению показателя α на логарифм числа x по основанию a:***

$$\log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a x, \text{ где } x > 0.$$

Доказательство. Обозначим $\log_a x = y$, тогда $x = a^y$. Возведем обе части полученного равенства в степень α: $x^\alpha = a^{\alpha y}$. По определению логарифма получим:

$$\log_a x^\alpha = \alpha \cdot y = \alpha \cdot \log_a x.$$

Теорема доказана.

Пример 3. Вычислите: а) $\log_3 9$; б) $\log_2 \frac{1}{64}$.

Решение.

а) $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2 \cdot \log_3 3 = 2 \cdot 1 = 2$;

б) $\log_2 \frac{1}{64} = \log_2 2^{-6} = -6\log_2 2 = (-6) \cdot 1 = -6$.

При нахождении логарифма корня его заменяют степенью с дробным показателем.

Пример 4. Найдите $\log_2 \sqrt[3]{4^5}$.

Решение. $\log_2 \sqrt[3]{4^5} = \log_2 4^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}\log_2 4 = \frac{5}{3}\log_2 2^2 = \frac{5}{3} \cdot 2 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$.

Замечание. Теоремы 1—3 свидетельствуют о том, что действия умножения, деления, возведения в степень могут быть сведены к более простым действиям — соответственно сложению, вычитанию логарифмов, умножению логарифма на некоторое число.

Теорема 4. ***Логарифм положительного числа по данному основанию равен частному от деления логарифма этого же числа по новому основанию на логарифм данного основания по новому основанию:***

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \text{ где } x > 0,\ a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1.$$

Доказательство. Прологарифмируем по основанию $b\,(b > 0,\ b \neq 1)$ основное логарифмическое тождество $a^{\log_a x} = x$:

$$\log_a x \cdot \log_b a = \log_b x.$$

Из полученного равенства найдем:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Теорема доказана.

Последнее соотношение называют формулой перехода от логарифма при основании a к логарифму при основании b.

Пример 5. Вычислите $\log_{16} 64$.

Решение. Заметим, что числа 16 и 64 являются степенями числа 4. Поэтому удобно перейти от данного логарифма к логарифму с основанием 4. Получим: $\log_{16} 64 = \frac{\log_4 64}{\log_4 16} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

Формула перехода позволяет логарифмы действительных чисел с произвольным основанием выражать через десятичные логарифмы. Это находит применение в практике вычислений, так как для десятичных логарифмов составлены таблицы.

Пример 6. Вычислите: а) $\log_{0{,}2} 56$; б) $\log_3 \frac{17}{14}$.

Решение. а) $\log_{0{,}2} 56 = \frac{\lg 56}{\lg 0{,}2} = \frac{1{,}7482}{(-1) + 0{,}3010} \approx -\frac{1{,}7482}{0{,}6990} \approx$
$\approx -2{,}5010$;

$$\text{б) } \log_3 \frac{17}{14} = \frac{\lg 17 - \lg 14}{\lg 3} \approx \frac{1{,}2304 - 1{,}1461}{0{,}4771} \approx 0{,}1767.$$

Пример 7. Докажите, что если значения аргумента логарифмической функции образуют конечную геометрическую прогрессию, то соответствующие им значения функции образуют арифметическую прогрессию.

Доказательство. Рассмотрим функцию $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, аргумент которой принимает значения, образующие геометрическую прогрессию: x_0; $x_0 q$; $x_0 q^2$;...; $x_0 q^{k-1}$. Тогда соответствующие значения логарифмической функции образуют последовательность: $\log_a x$; $\log_a (x_0 q)$; $\log_a (x_0 q^2)$; ...; $\log_a (x_0 q^{k-1})$.

Найдем разность двух любых соседних членов этой последовательности:

$$y_{k+1} - y_k = \log_a (x_0 q^k) - \log_a (x_0 q^{k-1}) =$$
$$= \log_a x_0 + k \log_a q - \log_a x_0 - (k-1) \log_a q = \log_a q.$$

Разность $y_{k+1} - y_k$ постоянна и равна $\log_a q$. Откуда $y_{k+1} = y_k + \log_a q$. Это означает, что последовательность $(\log_a (x_0 q^{k-1}))$ является арифметической прогрессией с разностью $\log_a q$.

Пример 8. Решите уравнение $\log_x 64 = -\frac{3}{2}$.

Решение. $x^{-\frac{3}{2}} = 64$, $\quad \left(x^{-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}} = 64^{-\frac{2}{3}}$, $\quad x = (4^3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{16}$.

Упражнения

1. Сформулируйте определение логарифма.

2. Запишите следующие равенства, применяя знак логарифма:

а) $6^3 = 216$; б) $4^5 = 1024$; в) $(0{,}1)^4 = 0{,}0001$;
г) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$; д) $2^{-5} = \frac{1}{32}$; е) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3} = 343$.

3. Запишите без знака логарифма следующие равенства:

а) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$; б) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$; в) $\log_5 625 = 4$;
г) $\log_2 1024 = 10$; д) $\log_{0{,}1} 0{,}0001 = 4$; е) $\log_{\frac{4}{3}} \frac{27}{64} = -3$.

4. Найдите логарифмы чисел по основанию 10: а) 10; б) 1000; в) 0,1; г) 0,0001; д) 10^n; е) $\sqrt{10}$; ж) $\sqrt[3]{10^2}$; з) $\sqrt[5]{100}$; и) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; к) $\frac{1}{10\sqrt{10}}$.

5. Найдите логарифмы чисел по основанию 2: а) 32; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{8}$; г) $\sqrt{2}$; д) $2\sqrt{2}$; е) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; ж) $\sqrt[3]{4}$; з) $\frac{4}{\sqrt[5]{2}}$.

6. Решите уравнения:

а) $\log_2 x = 5$; б) $\log_x 36 = 2$; в) $\log_{3\sqrt[3]{3}} x = -\frac{3}{2}$;
г) $\log_{4\sqrt[3]{4}} x = -\frac{3}{4}$; д) $\log_{\frac{1}{4}} x = -3$; е) $\log_x 27 = \frac{3}{2}$;
ж) $\log_x 4\sqrt[3]{4} = -\frac{4}{3}$; з) $\log_{2\sqrt[3]{5}} x = -6$; и) $\log_{\sqrt{3}} x = 4$;
к) $\log_x 2 = -0{,}5$.

7. Логарифм какого числа равен основанию данного логарифма?

8. Вычислите: а) $5^{1+\log_5 2}$; б) $3^{4+\log_3 5}$; в) $7^{2\log_7 4}$; г) $8^{1-\log_2 3}$; д) $a^{1+\log_a b}$; е) $a^{1-\log_a b}$; ж) $a^{3\log_a b}$; з) $a^{\frac{1}{3}\log_a b}$; и) $a^{2-\log_a b}$; к) $\sqrt{25^{2+\frac{1}{2}\log_5 36}}$; л) $2^{\log_{\sqrt{2}} 3 + 4\log_{\frac{1}{2}} 5}$; м) $9^{\frac{1}{2}\log_3 7 + 2\log_{81} 4}$.

9. Известно, что $\lg 3 = a$ и $\lg 2 = b$. Найдите: а) $\log_5 6$; б) $\log_{25} 12$.

10. Дано: $\log_4 125 = a$. Выразите $\lg 64$ через a.

11. Вычислите: а) $\log_{125} 5$; б) $\log_{\sqrt{7}} 49$; в) $\log_{\sqrt[3]{7}} \sqrt{49}$; г) $\log_{\sqrt{5}} \sqrt{625}$; д) $\log_2 0{,}125 + \log_{\sqrt{3}} 9$; е) $\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$.

12. Дано: $\lg 3 = a$, $\lg 2 = b$. Найдите $\log_{0{,}1} 6$.

13. Докажите:

а) $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$; б) $\log_{a^k} x = \dfrac{1}{k}\log_a x$;

в) $\log_{a^k} x^k = \log_a x$; г) $\dfrac{\log_a x}{\log_{a^b} x} = 1 + \log_a b$.

§ 85*. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ЛОГАРИФМОВ

Для выполнения вычислений с помощью логарифмов надо уметь логарифмировать алгебраические выражения и выполнять обратную операцию, называемую потенцированием. Потенцирование состоит в восстановлении алгебраического выражения по его логарифму.

Ниже приведены основные правила логарифмирования и потенцирования.

Правила логарифмирования (теоремы о логарифмах)	Правила потенцирования
$\log_a(x_1x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$	$\log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a(x_1x_2)$
$\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$	$\log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a \dfrac{x_1}{x_2}$
$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$	$\alpha \log_a x = \log_a x^\alpha$

Пример 1. Дано: $x = \dfrac{100\sqrt[3]{0{,}001a^2}}{\sqrt{10a}}$. Найдите $\lg x$.

Решение. По правилам логарифмирования находим:

$$\lg x = \lg 100 + \frac{1}{3}\lg 0{,}001 + \frac{2}{3}\lg a - \frac{1}{2}\lg 10 - \frac{1}{2}\lg a =$$

$$= 2 + \frac{1}{3}\cdot(-3) + \frac{2}{3}\lg a - \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\lg a = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\lg a.$$

Пример 2. Дано $x = \dfrac{a^3\sqrt{b}}{c^2\sqrt[5]{k}}$, где a, b, c, k — положительные числа. Найдите $\log_m x$.

Решение. По правилам логарифмирования находим:

$$\log_m x = 3\log_m a + \frac{1}{2}\log_m b - 2\log_m c - \frac{1}{5}\log_m k.$$

Пример 3. Применяя правила потенцирования, найдите x, если:

а) $\log_2 x = 4\log_2 3 - \dfrac{1}{3}\log_2 216 + \dfrac{1}{2}\log_2 25$;

б) $\log_5 x = \dfrac{1}{5}\log_5 m - 2\log_5 n - \dfrac{2}{3}\log_5 p + \log_5 q$.

Решение.

а) $\log_2 x = 4\log_2 3 - \dfrac{1}{3}\log_2 216 + \dfrac{1}{2}\log_2 25 = \log_2 3^4 - \log_2 216^{\frac{1}{3}} + \log_2 25^{\frac{1}{2}} = \log_2 \dfrac{81\sqrt{25}}{\sqrt[3]{216}} = \log_2 \dfrac{81\cdot 5}{6} = \log_2 67{,}5$. Из равенства $\log_2 x = \log_2 67{,}5$ находим $x = 67{,}5$.

б) $\log_5 x = \dfrac{1}{5}\log_5 m - 2\log_5 n - \dfrac{2}{3}\log_5 p + \log_5 q = \log_5 m^{\frac{1}{5}} - \log_5 n^2 - \log_5 p^{\frac{2}{3}} + \log_5 q = \log_5 \dfrac{\sqrt[5]{m}\cdot q}{n^2\cdot\sqrt[3]{p^2}}$. Из равенства $\log_5 x = \log_5 \dfrac{\sqrt[5]{m}\cdot q}{n^2\cdot\sqrt[3]{p^2}}$ находим $x = \dfrac{\sqrt[5]{m}\cdot q}{n^2\cdot\sqrt[3]{p^2}}$.

Наиболее удобными для вычисления являются логарифмы с основанием 10 (десятичные логарифмы). Любое положительное число x можно записать с помощью цифр 0; 1; 2; 3;...; 9 в виде $x = a\cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$, $n \in \mathbf{Z}$. Действительно, $18 = 1{,}8\cdot 10$; $263{,}7 = 2{,}637\cdot 10^2$; $12530 = 1{,}253\cdot 10^4$; $0{,}378 = 3{,}78\cdot 10^{-1}$; $0{,}0075 = 7{,}5\cdot 10^{-3}$ и т. д.

Запись числа x в виде $x = a\cdot 10^n$ называется стандартной записью этого числа, а целое число n — порядком этого числа. Например, число 37 имеет порядок 1, так как $37 = 3{,}7\cdot 10^1$; число 562,1 — порядок 2, так как $562{,}1 = 5{,}621\cdot 10^2$; число 0,0673 — порядок (—2), так как $0{,}0673 = 6{,}73\cdot 10^{-2}$.

Пусть x — произвольное положительное число. Представим его в стандартном виде: $x = a\cdot 10^n$, где n — целое число, $1 \leqslant a < 10$. Тогда $\lg x$ равен сумме двух слагаемых:

$$\lg x = n + \lg a.$$

Число n — порядок числа x есть целая часть логарифма этого числа $[\lg x]$, называемая его характеристикой; $\lg a$ есть правильная положительная дробь, так как $1 \leqslant a < 10$, значит, $\lg 1 \leqslant \lg a < \lg 10$ и $0 \leqslant \lg a < 1$.

Дробная часть логарифма $\{\lg a\}$ называется его мантиссой.

Логарифм числа x равен сумме его характеристики и мантиссы:

$$\lg x = [\lg x] + \{\lg x\}.$$

Теорема. ***Если положительное число x умножить на 10^n, где $n \in \mathbf{Z}$, то мантисса его логарифма не изменится.***

Действительно, $\lg x = [\lg x] + \{\lg x\}$,

$$\lg(x\cdot 10^n) = \lg x + \lg 10^n = n + \lg x = n + [\lg x] + \{\lg x\}.$$

Характеристика логарифма числа $x\cdot 10^n$ равна $n + [\lg x]$, а мантисса данного логарифма не изменилась. Таким образом, логарифмы чисел x и $x\cdot 10^n$ имеют одинаковые мантиссы.

Например, логарифмы чисел 0,00521; 0,0521; 5,21; 52,1; 521 000 отличаются друг от друга только характеристиками.

Характеристика $\lg x$ всегда целое число: положительное, если $x \geqslant 10$; равно нулю, если $1 \leqslant x < 10$; отрицательное, если $0 < x < 1$. Мантисса же $\lg x$ есть всегда неотрицательная правильная дробь.

Характеристику логарифма числа можно найти сразу — она равна порядку данного числа в его стандартной записи. Например:

$$[\lg 15{,}28] = [\lg 1{,}528 \cdot 10^1] = 1,$$
$$[\lg 513{,}7] = [\lg 5{,}137 \cdot 10^2] = 2,$$
$$[\lg 257\,000] = [\lg 2{,}57 \cdot 10^5] = 5,$$
$$[\lg 0{,}0072] = [\lg 7{,}2 \cdot 10^{-3}] = -3,$$
$$[\lg 0{,}0000304] = [\lg 3{,}04 \cdot 10^{-5}] = -5.$$

Мантиссы десятичных логарифмов чисел отыскиваются по специальным таблицам, называемым таблицами логарифмов.

Для разных целей употребляются таблицы логарифмов с различной степенью точности. Для вычислений мы будем пользоваться «Четырехзначными математическими таблицами» В. М. Брадиса. В таблице XIII даны значения мантисс десятичных логарифмов, вычисленные с четырьмя десятичными знаками для всех чисел из промежутка [1; 10[.

Приведем фрагмент этой таблицы и покажем на примерах, как пользоваться ею для вычислений.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11

Пример 1. Вычислите: а) $\lg 32{,}84$; б) $\lg 0{,}0003473$.

Решение. а) Характеристика логарифма 32,84 равна 1. На пересечении строки с меткой 32 и столбца с меткой 8 находим число 5159. Прибавим к этому числу поправку, найденную для цифры 4 в правой части таблицы на пересечении той же строки и столбца поправок с меткой 4, т. е. число 5, получим число $5159 + 5 = 5164$. Итак, мантисса искомого логарифма равна 0,5164. Следовательно, $\lg 32{,}84 \approx 1{,}5164$.

б) Характеристика логарифма числа 0,0003473 равна -4. На пересечении строки с меткой 34 и столбца с меткой 7 находим число 5403. Прибавим к этому числу поправку, найденную для цифры 3 в правой части таблицы на пересечении той же строки и столбца поправок с меткой 3, т. е. число 4, тогда получим число $5403 + 4 = 5407$. Таким образом, мантисса искомого логарифма равна 0,5407. Следовательно, $\lg 0{,}0003473 \approx -4 + 0{,}5407 = -3{,}4593$.

Для нахождения числа по его логарифму можно пользоваться той же таблицей логарифмов, выполняя действия в порядке, обратном описанному выше.

Однако в сборнике таблиц В. М. Брадиса для решения этой задачи имеется специальная таблица (таблица XIV), называемая таблицей антилогарифмов. Эта таблица выражает значения функции $y = 10^x$. Она устроена так же, как и таблица логарифмов, и позволяет по мантиссе логарифма вначале найти значащие цифры числа, а после этого по его характеристике определить положение запятой.

Приведем фрагмент таблицы антилогарифмов и покажем на примерах, как пользоваться ею при вычислениях.

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
,26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
,27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4

Пример 2. Найдите x, если: а) $\lg x = 2{,}2638$; б) $\lg x = -3{,}7217$.

Решение. а) По условию характеристика логарифма числа x равна 2, а мантисса 0,2638. По таблице антилогарифмов на пересечении строки с меткой 26 и столбца с меткой 3 находим число 1832. Прибавим к найденному числу поправку для цифры 8, стоящую в правой стороне таблицы на пересечении той же строки и столбца с меткой 8, т. е. число 3, получим число $1832 + 3 = 1835$, которое составляет значащие цифры искомого числа x. Учитывая, что характеристика $\lg x$ равна 2, получаем $x \approx 183{,}5$.

б) Преобразуем данное значение логарифма так, чтобы вычленить его мантиссу:

$$-3{,}7217 = (-3) + (-0{,}7217) = (-3) + (-1) + (1 - 0{,}7217) = \\ = -4 + 0{,}2783.$$

Таким образом, характеристика логарифма числа x равна -4, а мантисса 0,2783. По таблице антилогарифмов находим число 1898, соответствующее мантиссе 0,2783. Так как характеристика $\lg x$ равна отрицательному числу -4, то искомое число x приближенно равно 0,0001898.

Для вычислений логарифмов тригонометрических функций составлены специальные таблицы их значений (таблицы XV — XIX в таблицах В. М. Брадиса). Принцип устройства этих таблиц такой же, как и таблиц синусов (косинусов) и тангенсов (котангенсов).

Пример 4. Вычислите: а) $\lg\sin 31^\circ 18'$; б) $\lg\cos 72^\circ 20'$; в) $\lg\operatorname{tg} 58^\circ 32'$; г) $\lg\operatorname{ctg} 20^\circ 52'$.

Решение. а) $\lg\sin 31^\circ 18' \approx (-1) + 0{,}7156 = -0{,}2844$;

б) $\lg\cos 72^\circ 20' \approx (-1) + 0{,}4821 = -0{,}5179$;

в) $\lg\operatorname{tg} 58^\circ 32' \approx 0{,}2133$;

г) $\lg\operatorname{ctg} 20^\circ 52' \approx 0{,}4189$.

Пример 5. Вычислите с помощью таблиц логарифмов $\dfrac{0{,}5432^3}{\sqrt{0{,}00175}\cdot\sin 47^\circ 32'}$.

Решение. Обозначим данное выражение буквой x. Находим $\lg x$:

$$\lg x = 3\lg 0{,}5432 - \frac{1}{2}\lg 0{,}00175 - \lg\sin 47^\circ 32'.$$

По таблице логарифмов находим:

$$\lg 0{,}5432 \approx -1 + 0{,}7350 = -0{,}2650,$$
$$3\lg 0{,}5432 \approx 3\cdot(-0{,}2650) = -0{,}7950,$$
$$\lg 0{,}00175 \approx -3 + 0{,}2430 = -2{,}7570,$$
$$-\frac{1}{2}\lg 0{,}00175 \approx -\frac{1}{2}\cdot(-2{,}7570) = 1{,}3785,$$
$$\lg\sin 47^\circ 32' \approx (-1) + 0{,}8678 = -0{,}1322,$$
$$-\lg\sin 47^\circ 32' \approx -(-0{,}1322) \approx 0{,}1322.$$

Теперь находим $\lg x$:

$$\lg x \approx -0{,}7950 + 1{,}3785 + 0{,}1322 = 0{,}7157.$$

По таблице XIV находим значение x: $x \approx 5{,}196$.

Упражнения

1. Сформулируйте теоремы о логарифмах.

2. Известно, что $\lg 2 = 0{,}3010$, а $\lg 3 = 0{,}4771$. Не пользуясь таблицами логарифмов, вычислите: а) $\lg 6$; б) $\lg 12$; в) $\lg 5$; г) $\lg 15$; д) $\lg\frac{8}{15}$; е) $\lg 4\frac{4}{5}$; ж) $\lg 0{,}6$; з) $\lg 0{,}12$.

3. Как изменится логарифм данного числа, если, не изменяя основания: а) число возвести в квадрат; б) из числа извлечь квадратный корень; в) число возвести в куб; г) из числа извлечь кубический корень; д) число увеличить в три раза; е) число уменьшить в 4 раза?

4. Прологарифмируйте по основанию 10 выражения:

а) $x = 3ab$; б) $x = \dfrac{2bc}{a}$; в) $x = \dfrac{a^2b^5}{c^3}$; г) $x = 4(a+b)$;

д) $x = \dfrac{a+b}{a-b}$; е) $x = \dfrac{\sqrt[3]{ac}}{(a+c)^2}$; ж) $x = \dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{abc}$;

з) $x = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; и) $x = 5a\sqrt[3]{a^4(a-b)^2}$.

5. Прологарифмируйте по основанию 10 выражения:

а) $h = \left(\dfrac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[4]{3b}}\right)^5$; б) $v = \dfrac{c^3}{6}\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt[3]{\cos\alpha}$;

в) $s = 6\sqrt{\dfrac{n^3}{\sin 2\alpha\cos\alpha}}$; г) $z = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{a\sqrt{b}}$;

д) $t = \dfrac{3}{4}\sqrt{m\cdot\sqrt[3]{n}}$.

6. Представьте в виде произведения следующие выражения и прологарифмируйте их:

а) $x = 1 - \cos\alpha$; б) $x = 1 + \cos\alpha$;
в) $x = 1 + \sin 2\alpha$; г) $x = 1 - 2\sin\alpha$;
д) $x = \sin 3\alpha + \sqrt{3}\cos 3\alpha$; е) $x = 3 - 4\sin^2\alpha$;
ж) $x = 1 - 2\sin^2\alpha$; з) $x = \sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha-\beta)$;
и) $x = \sqrt{3} + \operatorname{tg}\alpha$; к) $x = 1 - \operatorname{ctg}^2 2\alpha$.

7. Выполните потенцирование выражений:

а) $\log x = 3\log a + \log b$;
б) $\log x = \log a - 4\log b$;
в) $\log x = 2\log a - 3\log b + 4\log c$;
г) $\log x = 2\log(a+b) - \frac{1}{2}\log(a-b)$;
д) $\log x = \frac{2}{3}\log a + \frac{3}{2}\log b$;
е) $\log x = \frac{2}{3}(\log a - \log b) - \log(a-b)$.

8. Найдите x по данному его логарифму:

а) $\log x = \log 7 - \log 3 + \log 8$;
б) $\log x = 2\log 3 + \log 6 - \frac{1}{2}\log 9$;
в) $\log x = \frac{1}{2}\log 3 + \frac{2}{3}\log 5 - \frac{1}{3}\log 4$;
г) $\log x = \frac{1}{3}\log(a+b) - (\log a + 2\log(b+c))$.

9. Запишите в стандартном виде данное число и укажите его порядок: а) 37,8; б) 532,14; в) 0,15; г) 0,000385.

10. Найдите характеристику десятичного логарифма числа: а) 9; б) 123; в) 5832,7; г) 0,17; д) 0,00513.

11. В каком случае характеристика десятичного логарифма числа N: а) положительна; б) равна нулю; в) отрицательна?

12. Найдите десятичный логарифм числа: а) 10; б) 100; в) 1000; г) 10 000; д) 10^n; е) 0,01; ж) 0,001; з) 0,0001; и) 10^{-6}.

13. Почему мантиссы логарифмов $\lg x$ и $\lg(x\cdot 10^n)$ одинаковы?

14. Найдите по таблицам десятичные логарифмы чисел: а) 89; б) 342; в) 0,147; г) 0,0063; д) 21,93.

15. Найдите десятичные логарифмы чисел: а) 17809; б) 32,571; в) 0,00058341; г) 0,74415.

16. Найдите число, десятичный логарифм которого равен: а) 1,8415; б) 0,3562; в) —0,7843; г) —2,8761.

17*. Сколько значащих цифр имеют числа: а) 3^{100}; б) 5^{50}?

18*. Установите знак разности $21^{23}-23^{21}$.

19. Вычислите с помощью таблиц десятичных логарифмов:

а) $\dfrac{1{,}894^4\cdot 23{,}4^3}{44{,}15^2\cdot 0{,}9647}$; б) $\dfrac{0{,}897^2\cdot \sqrt[4]{0{,}0792}}{2{,}15^3\cdot \sqrt[3]{12{,}76^2}}$;

в) $\sqrt{\dfrac{2{,}591^4\cdot \sqrt[3]{0{,}0836}}{1{,}147^2}}$; г) $(0{,}273)^{1{,}573}$.

20. При помощи таблиц десятичных догарифмов вычислите: а) $\log_2 0{,}012$; б) $\log_{\frac{1}{2}} 75$; в) $\log_8 0{,}04$; г) $\log_{0{,}002} 0{,}02$.

§ 86. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Логарифмическим уравнением называют уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма.

Примеры логарифмических уравнений: $\log_2 x=1-x$; $\log_2(x+6)=3$; $\log_x(x-1)=2$; $\sqrt{\lg x}=\lg\sqrt{x}$ и т. д.

Решить логарифмическое уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Рассмотрим некоторые способы решения логарифмических уравнений.

Отметим, что в описанных ниже способах решения логарифмических уравнений применяются только такие преобразования, которые не приводят к потере корней, а могут лишь привести к приобретению посторонних корней. Поэтому проверка каждого из полученных корней обязательна, если нет уверенности в равносильности уравнений.

Решение логарифмических уравнений на основании определения логарифма.

Пример 1. Решите уравнение $\log_3(2x+1)=2$.

Решение. По определению логарифма имеем: $2x+1=3^2$, $2x=8$, $x=4$.

Проверка: $\log_3(2\cdot 4+1)=\log_3 9=2$.

Ответ: 4.

Пример 2. Решите уравнение $\log_{x+1}(2x^2+1)=2$.

Решение. По определению логарифма имеем: $2x^2+1=(x+1)^2$, $2x^2+1=x^2+2x+1$, $x^2-2x=0$, $x=0$ или $x=2$.

Проверка: 1) Значение $x=0$ не может быть корнем данного уравнения, так как основание логарифма $x+1$ не должно равняться 1.

2) $\log_{2+1}(2\cdot 2^2+1)=\log_3 9=2$.

Ответ: 2.

Пример 3. Решите уравнение $\log_\pi\log_2\log_3 3x=0$.

Решение. Применяя последовательно определение логарифма, получим: $\log_2\log_3 3x=\pi^0$, $\log_2\log_3 3x=1$, $\log_3 3x=2^1$, $\log_3 3x=2$, $3x=3^2$, $x=3$.

Проверка: $\log_\pi\log_2\log_3 3\cdot 3=\log_\pi\log_2\log_3 9=\log_\pi\log_2 2=$ $=\log_\pi 1=0$.

Ответ: 3.

Задание 1. Решите уравнения: а) $\log_2(3x+7)=4$; б) $\log_{x-1}(3x^2-8x+1)=2$; в) $\log_2\log_3\log_4(6x+4)=0$.

Метод потенцирования.

Пример 4. Решите уравнение $\log_5 x=\log_5(6-x^2)$.

Решение. Из равенства логарифмов чисел следует: $x=6-x^2$, $x^2+x-6=0$, $x=-3$ или $x=2$.

Проверка: 1) Число —3 корнем данного уравнения быть не может, так как логарифмы отрицательных чисел не существуют.

2) $\log_5 x=\log_5 2$, $\log_5(6-x^2)=\log_5(6-2^2)=\log_5 2$.

Ответ: 2.

Пример 5. Решите уравнение $\log_5(x+4)-\log_5(1-2x)=$ $=-\log_5(2x+3)$.

Решение. Потенцируя данное равенство, получим:

$$\log_5\frac{x+4}{1-2x}=\log_5(2x+3)^{-1},\ \frac{x+4}{1-2x}=(2x+3)^{-1},\ \frac{x+4}{1-2x}=\frac{1}{2x+3},$$
$$2x^2+3x+8x+12=1-2x,\ 2x^2+13x+11=0,$$
$$x=-1 \text{ или } x=-5{,}5.$$

Проверка: 1) $\log_5 3-\log_5 3=0$, $-\log_5 1=0$, $x=-1$ — корень.

2) $\log_5(-1{,}5)$ — не существует.

Ответ: —1.

Пример 6. Решите уравнение

$$\log_{x-6}(x^2-5)=\log_{x-6}(2x+19).$$

Решение. $x^2-5=2x+19$, $x^2-2x-24=0$, $x=-4$ или $x=6$.

Проверка: 1) $\log_{-10}11$ — не существует, $x=-4$ — не корень.

2) $\log_0 31$ — не существует, $x=6$ — не корень.

Ответ: уравнение решений не имеет.

Задание 2. Решите уравнения:

а) $\log_2(x+13)=2\log_2(x+1)$;

б) $\log_3(x+2)+\log_3(x+1)=\log_3(x+5)$.

Приведение логарифмического уравнения к квадратному.

Пример 7. Решите уравнение $\lg^2 x=3-2\lg x$.

Решение. Обозначим $\lg x$ через y. Данное уравнение принимает вид: $y^2=3-2y$, $y^2+2y-3=0$, $y=-3$ или $y=1$. $\lg x=-3$, $x=0{,}001$ или $\lg x=1$, $x=10$.

Проверка: 1) $\lg^2 0{,}001 = 9$, $3 - 2\lg 0{,}001 = 9$, $x = 0{,}001$ — корень.

2) $\lg^2 10 = 1$, $3 - 2\lg 10 = 1$, $x = 10$ — корень.

Ответ: 0,001; 10.

Задание 3. Решите уравнения: а) $\log_3^2 x - \log_3 x = 2$; б) $\log_2^2 4x + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8$.

Уравнения, решаемые приведением логарифмов к одному и тому же основанию.

Пример 8. Решите уравнения:

а) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$; б) $\log_{3x} 3 = \log_{x^2} 3$.

Решение.

а) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$, $\frac{\log_2 x}{\log_2 16} + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \log_2 x = 7$, $\frac{1}{4}\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \log_2 x = 7$, $\frac{7}{4}\log_2 x = 7$, $\log_2 x = 4$, $x = 16$.

Проверка: $\log_{16} 16 + \log_4 16 + \log_2 16 = 1 + 2 + 4 = 7$.

Ответ: 16.

б) $\frac{\log_3 3}{\log_3 3x} = \frac{\log_3 3}{\log_3 x^2}$, $\frac{1}{1 + \log_3 x} = \frac{1}{2\log_3 x}$, $2\log_3 x = 1 + \log_3 x$, $\log_3 x = 1$, $x = 3$.

Проверка: $\log_{3\cdot 3} 3 = \log_{3^2} 3 = \log_9 3$.

Ответ: 3.

Задание 4. Решите уравнения: а) $\log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 3$; б) $\log_{x^2} 9 + \log_{3x} 81 = 3$.

Уравнения, решаемые логарифмированием его обеих частей.

Пример 9. Решите уравнение $x^{\lg x + 2} = 1000$.

Решение. Логарифмируя обе части уравнения ($x > 0$), получим:

$$(\lg x + 2) \cdot \lg x = \lg 1000,$$
$$\lg^2 x + 2\lg x - 3 = 0.$$

Заменим $\lg x = y$. Уравнение принимает вид: $y^2 + 2y - 3 = 0$, $y = -3$ или $y = 1$.

$$\lg x = -3,\ x = 10^{-3} = 0{,}001;$$
$$\lg x = 1,\ x = 10.$$

Проверка: 1) $0{,}001^{\lg 0{,}001 + 2} = 0{,}001^{-3+2} = 0{,}001^{-1} = 1000$; $x = 0{,}001$ — корень данного уравнения.

2) $10^{\lg 10 + 2} = 10^{1+2} = 10^3 = 1000$, $x = 10$ — корень уравнения.

Ответ: 10; 0,001.

Задание 5. Решите уравнение $x^{\frac{\lg x + 5}{3}} = 10^{5 + \lg x}$.

Графическое решение логарифмических уравнений.

Пример 10. Решите графически уравнение $\log_2 x = 3 - x$.

Решение. В одной и той же системе координат строим графики функций $f(x) = \log_2 x$ и $\varphi(x) = 3 - x$ (рис. 210). Абсцисса точки пересечения графиков функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ равна примерно двум. Нетрудно проверить, что это точный корень данного уравнения.

Задание 6. Решите графически уравнения: а) $\log_{\frac{1}{2}} x = x - 3$; б) $\log_3 x = 0{,}5x - 0{,}5$.

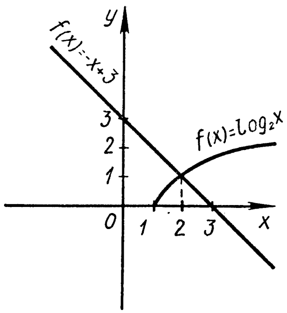


Рис. 210

Упражнения

1. Какое уравнение называется логарифмическим? Приведите примеры логарифмических уравнений.

2. Почему при решении логарифмических уравнений потенцированием возможно появление посторонних корней?

3. Назовите способы решения логарифмических уравнений.

4. Составьте план решения уравнения:

а) $\log_a f(x) = \log_a \varphi(x)$; б) $\log_a f(x) + \log_a \varphi(x) = \log_a g(x)$.

5. Решите уравнения:

а) $\log_{\frac{1}{2}} (2x + 3) = 0$; б) $\log_3 (x + 5) = -1$;

в) $\log_{0,2} (x - 1) = 4$; г) $\log_4 \log_2 x = \frac{1}{2}$;

д) $\log_5 \log_3 \log_2 (x^2 + 7x) = 0$; е) $\log_2 (9 - 2^x) = 3 - x$;

ж) $\log_5 x^2 = 2$.

6. Решите уравнения:

а) $\log_{0,1} (x^2 + 1) = \log_{0,1} (2x - 5)$;

б) $\log_2 (x + 12) = 2\log_2 x$;

в) $\lg (x + 1{,}5) = -\lg x$;

г) $\log_5 (x - 1) + \log_5 (x - 2) = \log_5 (x + 2)$;

д) $\lg (x^2 + 75) - \lg (x - 4) = 2$;

е) $\lg (x + 6) - \frac{1}{2}\lg (2x - 3) = 2 - \lg 25$;

ж) $\frac{2\log_{0,3} x}{\log_{0,3} (5x - 4)} = 1$;

з) $0{,}5\lg (2x - 1) = 1 - \lg \sqrt{x - 9}$.

7. Решите уравнения:

а) $\log_2^2 x - 3\log_2 x = 4$;

б) $\frac{1}{12}\lg^2 x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\lg x$;

в) $\frac{1}{5 - \log_3 x} + \frac{2}{1 + \log_3 x} = \ln e$;

г) $\log_2^2 x^3 - 20\log_2 \sqrt{x} + 1 = 0$;

д) $3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2 (1 - \cos 2x) = 2$;

е) $0{,}1\lg^4 x - \lg^2 x + 0{,}9 = 0$.

8. Решите уравнения:

а) $x^{\log_3 x}=3$; б) $x^{\log_2 x+2}=8$; в) $x^{1-\frac{\log_5 x}{4}}=5$;

г) $x^{2-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} x}=\frac{1}{9}$; д) $\frac{1}{2}x^{\log_2 x-2}=4$; е) $x^{1-0{,}25\lg x}=10$;

ж) $x^{\lg x}=100x$; з) $x^{2\lg^2 x}=10x^3$; и) $x^{2\lg x^3-\frac{3}{2}\lg x}=\sqrt{10}$.

9. Решите уравнения:

а) $\log_2 x-\log_{\frac{1}{2}} x=4$; б) $2\log_5 x+2\log_x 5=5$;

в) $\log_{x^2}16+\log_{2x}64=3$; г) $3\log_x 16-4\log_{16} x=2\log_2 x$;

д) $\log_x(5x^2)\cdot\log_5^2 x=1$.

10. Решите графически уравнения:

а) $x+\lg x=1$; б) $\log_2 x=x+1$;

в) $\lg x+2=x^2$; г) $\log_3 x+|x|=0$;

д) $2\log_2 x=\sin x$.

11. Решите уравнения:

а) $\lg 5x+\lg(x-1)=1$; б) $2\log_3(2x-1)=\log_3(3x+1)$;

в) $\lg^2 x+\lg x^2=-1$; г) $\lg(2x-1)-2=\lg 0{,}3$;

д) $x^{\lg x}=10$; е) $\log_4 x-\log_{0{,}25} x=4$;

ж) $\ln(x^2-5x-9)-\ln(2x-1)=0$; з) $x^{4\lg x}=10$;

и) $x^{\frac{1}{4}(\lg x+7)}=10^{\lg x+1}$; к) $\lg x=2^{-x}$.

§ 87. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

На рисунках 211, 212 приведены графики логарифмической функции $y=\log_a x$ для случаев $a>1$ и $0<a<1$. Из возрастания функции $y=\log_a x$ в первом случае и убывания — во втором следует:

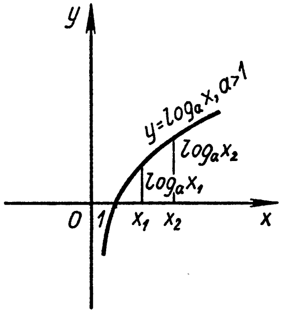


Рис. 211

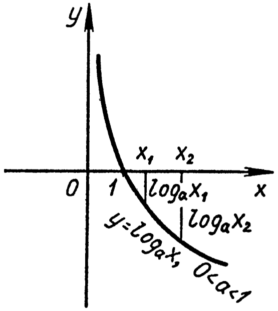


Рис. 212

1) при $a>1$, если $\log_a x_2>\log_a x_1$, то $x_2>x_1$, где $x_1>0$, $x_2>0$;

2) при $0<a<1$, если $\log_a x_2<\log_a x_1$, то $x_2>x_1$, где $x_1>0$, $x_2>0$.

Сформулированные утверждения используются при решении логарифмических неравенств. Логарифмическое неравенство в конечном счете сводится к неравенству вида

$$\log_a f(x)>\log_a \varphi(x), \tag{1}$$

где $a>0$, $a\neq 1$. Если $a>1$, то неравенство (1) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x)>0,\\ \varphi(x)>0,\\ f(x)>\varphi(x).\end{cases}$$

Если $0<a<1$, то неравенство (1) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x)>0,\\ \varphi(x)>0,\\ f(x)<\varphi(x).\end{cases}$$

Рассмотрим примеры.

Решите неравенства: 1) $\log_5(x-3)<2$; 2) $\log_{0{,}5}(2x-4)>-1$; 3) $\log_{7{,}8}\frac{x}{x+3}>0$; 4) $\log_{0{,}5}\log_8\frac{x^2+8x}{x-3}<0$; 5) $\log_{\frac{1}{3}} x<x+2$ (графически); 6) $\lg(x-1)+\lg(x-2)<\lg(x+2)$.

Решение:

1) $\log_5(x-3)<2$, $\log_5(x-3)<\log_5 25$,

$$\begin{cases} x-3>0,\\ x-3<25,\end{cases}\quad \begin{cases} x>3,\\ x<28,\end{cases}\quad 3<x<28.$$

2) $\log_{0{,}5}(2x-4)>-1$, $\log_{0{,}5}(2x-4)>\log_{0{,}5}(0{,}5)^{-1}$, $\log_{0{,}5}(2x-4)>\log_{0{,}5}2$,

$$\begin{cases} 2x-4>0,\\ 2x-4<2,\end{cases}\quad \begin{cases} x>2,\\ x<3,\end{cases}\quad 2<x<3.$$

3) $\log_{7{,}8}\frac{x}{x+3}>0$, $\frac{x}{x+3}>1$,

$$\frac{x}{x+3}-1>0,\quad \frac{-3}{x+3}>0,\quad x+3<0,\quad x<-3.$$

4) $\log_{0{,}5}\log_8\frac{x^2+8x}{x-3}<0$,

$$\log_8\frac{x^2+8}{x-3}>1,\quad \log_8\frac{x^2+8x}{x-3}>\log_8 8,$$

$$\frac{x^2+8x}{x-3}>8,\quad \frac{x^2+8x}{x-3}-8>0,\quad \frac{x^2+24}{x-3}>0,\quad x-3>0,\quad x>3.$$

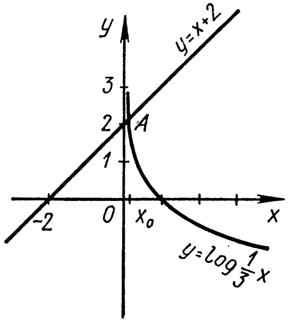


Рис. 213

5) Строим графики функций $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ и $y=x+2$ в одной системе координат (рис. 213). Графики пересекаются в точке A с абсциссой $x_0\approx 0{,}1$. Из рисунка видно, что множеством решений неравенства $\log_{\frac{1}{3}}x<x+2$ служит промежуток $]x_0;\ \infty[$, где $x_0\approx 0{,}1$.

6) $\begin{cases} x-1>0, \\ x-2>0, \\ x+2>0, \\ \lg(x-1)(x-2)<\lg(x+2), \end{cases}$

$$\begin{cases} x-1>0, \\ x-2>0, \\ x+2>0, \\ (x-1)(x-2)<x+2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x>1, \\ x>2, \\ x>-2, \\ x^2-4x<0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>2, \\ x(x-4)<0, \end{cases} \quad \begin{cases} x>2, \\ 0<x<4, \end{cases} \quad 2<x<4.$$

Упражнения

1. Приведите примеры логарифмических неравенств.

2. Запишите план решения неравенств:

а) $\log_a f(x)>\log_a \varphi(x)$ при $a>1$;

б) $\log_a f(x)<\log_a \varphi(x)$ при $0<a<1$.

3. Установите знак выражения:

а) $\log_{0,3}100-\log_{0,3}9$; б) $\log_{1,7}\left(\frac{1}{2}(1-\log_7 3)\right)$;

в) $\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)$.

4. Решите неравенства:

а) $\log_2(5x-2)>1$; б) $\log_{\frac{1}{2}}(5x-2)>1$;

в) $\log_3|2x-7|<1$; г) $\log_{0,3}(x^2-5x+7)\geqslant 0$;

д) $\log_5(x^2-11x+43)>2$; е) $\log_2(x^2-3x)\leqslant 2$.

5. Решите неравенства:

а) $\log_8(5x-8)<\log_8(2x+7)$;

б) $\log_2(x-1)-\log_2(2x-4)>0$;

в) $\log_{0,3}(x^2+1)-\log_{0,3}2x<0$;

г)* $\log_\pi(x-1)+\log_\pi(x-2)<\log_\pi(x+2)$;

д)* $\ln x-\ln(2x-5)\leqslant\ln 2-\ln(x-3)$.

6*. Решите неравенства введением вспомогательной переменной:

а) $\lg^2x-2\lg x-3\leqslant 0$; б) $(\log_{0,2}(x-1))^2>4$;

в) $4\log_4^2x-\log_4 x>3$; г) $\frac{2}{1+\lg x}\geqslant 1$.

7. Решите графически неравенства:

а) $\lg(2-x)<x-1$; б) $\log_3 x\leqslant 4-x$; в) * $\log_2|x|<2^x$.

§ 88. ПРОИЗВОДНАЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Прежде чем выводить формулу производной логарифмической функции, покажем, исходя из геометрических соображений, ее дифференцируемость в каждой точке области определения.

На рисунке 214 изображены графики двух взаимно обратных функций $f(x)=a^x\ (a>1)$ и $g(x)=\log_a x\ (a>1)$. Эти графики симметричны относительно прямой $y=x$.

Показательная функция $f(x)=a^x$ имеет производную в каждой точке: $(a^x)'=a^x\ln a\neq 0$. В каждой точке кривой $f(x)=a^x$ существует негоризонтальная касательная. Поэтому симметричная ей относительно прямой $y=x$ кривая $g(x)=\log_a x$ имеет в каждой точке невертикальную касательную. Следовательно, логарифмическая функция имеет в каждой точке производную, т. е. она дифференцируема во всей области ее определения.

Перейдем теперь к выводу формулы производной логарифмической функции. Воспользуемся равенством $a^{\log_a x}=x$. Дифференцируя обе части этого равенства, получим: $(a^{\log_a x})'=x'$, или $a^{\log_a x}\cdot\ln a\cdot(\log_a x)'=1$, откуда $(\log_a x)'=\frac{1}{a^{\log_a x}\cdot\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$. Следовательно, формула производной логарифмической функции имеет вид:

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

Если основанием логарифмической функции служит число e, то формула ее производной проще:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

Пример 1. Найдите производную функции: а) $y=\log_3 x$; б) $y=\lg 5x$; в) $y=\ln^2(5x+1)$; г) $y=\ln\sqrt[3]{2x}$.

Решение. а) $y'=(\log_3 x)'=\frac{1}{x\ln 3}$.

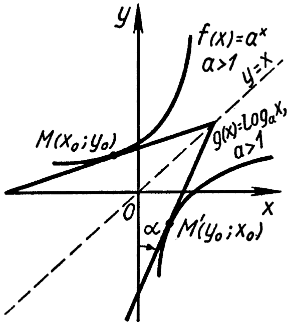


Рис. 214

б) $y' = (\lg 5x)' = \frac{1}{5x\ln 10}\cdot(5x)' = \frac{5}{5x\ln 10} = \frac{1}{x\ln 10}$.

в) Применяя правило дифференцирования сложной функции, имеем: $y' = (\ln^2(5x+1))' = 2\ln(5x+1)\cdot(\ln(5x+1))' = 2\ln(5x+1)\cdot\frac{1}{5x+1}\cdot(5x+1)' = \frac{10\ln(5x+1)}{5x+1}$.

г) Для упрощения процесса дифференцирования выполним предварительно логарифмирование:

$$\ln\sqrt[3]{2x} = \frac{1}{3}\ln(2x) = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{3}\ln x.$$

Теперь имеем: $(\ln\sqrt[3]{2x})' = \left(\frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{3}\ln x\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{3x}$.

Пример 2. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \ln x$ в точке $(e;\ 1)$.

Решение. Уравнение касательной к кривой имеет вид: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. По условию $f(x) = \ln x$, $x_0 = e$, $f(x_0) = 1$, значит, $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, $f'(x_0) = \frac{1}{e}$.

Уравнение искомой касательной: $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$, $y = \frac{1}{e}x$.

Пример 3. Постройте график функции $f(x) = x - \ln x$.

Решение. Исследуем данную функцию:

1. $D(f) =]0;\ \infty[$; $f(x)$ непрерывна в каждой точке области определения.

2. Функция $f(x)$ не является ни четной, ни нечетной.

3. График функции не имеет общих точек с осью Ox, поскольку $x - \ln x \neq 0$.

4. Найдем критические точки:

$$f'(x) = (x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x};$$

$$f'(x) = 0,\ \frac{x-1}{x} = 0,\ x - 1 = 0,\ x \neq 0;\ x = 1.$$

Критическая точка: $x = 1$.

$$f(1) = 1 - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

Составим таблицу:

x	$]0;\ 1[$	1	$]1;\ \infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗
		min	

5. Строим график функции (рис. 215).

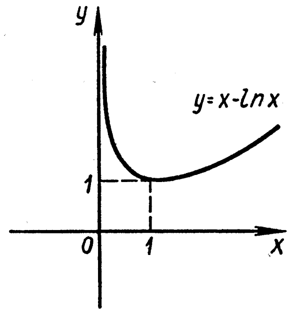


Рис. 215

Упражнения

1. Исходя из геометрических соображений, объясните, почему логарифмическая функция дифференцируема в любой точке области ее определения.

2. Запишите формулу производной логарифмической функции: а) $y = \log_a x$; б) $y = \ln x$.

3. Найдите производные функций:

а) $y = \log_2 x$; б) $y(x) = 3\log_5 x$;

в) $\varphi(x) = \frac{1}{2}\log_{0,1}(x - 1)$; г) $f(x) = 2\cos x + \ln x$;

д) $y = x^3\ln x$; е) $h(x) = (2x^2 + 5)\log_2 x$;

ж) $z(x) = e^x\ln x$; з) $g(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}$.

4. Вычислите:

а) $f'(2)$, если $f(x) = \log_4 x$;

б) $\varphi'(1)$, если $\varphi(x) = \lg(2x + 1)$;

в) $h'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, если $h(x) = \ln\cos x$;

г) $f'(1)$, если $f(x) = 2e^x\ln x$;

д) $z'(e)$, если $z(x) = \ln^2 x$.

5. Найдите производную функции, предварительно выполнив логарифмирование: а) $f(x) = \ln\sqrt{3x+1}$; б) $\varphi(x) = \ln\sqrt[5]{(x^2-6)^2}$; в) $g(x) = \ln\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$.

6. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = e$.

7. В какой точке касательная к кривой $y = \ln x$ параллельна прямой $y = x + 1$?

8. Найдите промежутки возрастания и убывания функции: а) $y = \ln\frac{1}{x}$; б) $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$.

9. Исследуйте на экстремум функцию: а) $y = x - 2\ln x$; б) $f(x) = x\ln x$.

10*. Постройте график функции: а) $y = x + \ln x$; б) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

§ 89. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ПРОИЗВОДНАЯ

Напомним, что степень числа a с любым действительным показателем α была определена ранее следующим образом:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}, \text{ где } a \in \boldsymbol{R},\ n \in \boldsymbol{N},\ n \neq 1;$$

$$a^1 = a;$$

$$a^0 = 1, \text{ где } a \neq 0;$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \text{ где } a \neq 0,\ m \in \boldsymbol{N};$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ где } a > 0,\ n \in \boldsymbol{N},\ m \in \boldsymbol{Z};$$

$$a^\alpha = \lim_{n \to \infty} a^{r_n}, \text{ где } a > 0,\ \alpha = \lim_{n \to \infty} r_n \text{ — иррациональное число.}$$

Это позволяет ввести понятие степенной функции $y = x^\alpha$. Степенная функция определена:

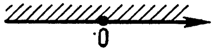
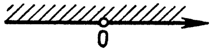
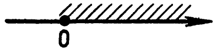
1) на множестве действительных чисел при натуральных α;

2) на множестве действительных чисел, отличных от нуля, при целых отрицательных α либо при $\alpha = 0$;

3) на множестве неотрицательных чисел при несократимых положительных дробных и иррациональных положительных показателях α;

4) на множестве положительных чисел при несократимых отрицательных дробных и иррациональных отрицательных показателях α.

Разъясним определение степенной функции:

Функция $y = x^\alpha$		
Значения показателя степени	Область определения степенной функции	Примеры функций
$\alpha \in \boldsymbol{N}$	]−∞ ; +∞ [	$y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$
α — целое отрицательное число либо $\alpha = 0$	]−∞;0[U]0;+∞[	$y = x^{-1}$, $y = x^{-2}$, $y = x^{-3}$, $y = x^0 = 1$
α — положительная несократимая дробь либо положительное иррациональное число	 [0;+∞[	$y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\sqrt{2}}$, $y = x^{\frac{2}{3}}$
α — отрицательная несократимая дробь либо иррациональное отрицательное число	]0;+∞[	$y = x^{-\frac{1}{2}}$, $y = x^{-\sqrt{2}}$, $y = x^{-\frac{2}{3}}$

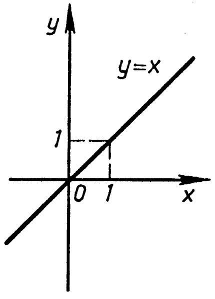


Рис. 216

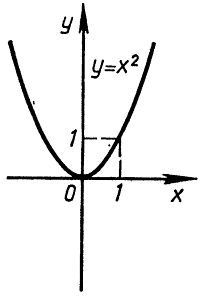


Рис. 217

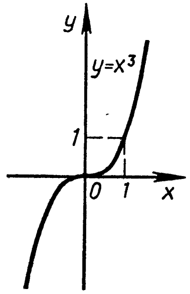


Рис. 218

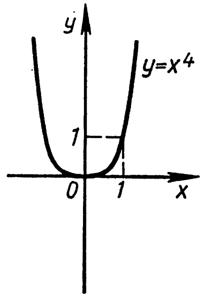


Рис. 219

На рисунках 216—219 изображены графики степенных функций при некоторых натуральных показателях.

Задание 1. Пользуясь графиками функций (рис. 216—219), расскажите о свойствах степенной функции с натуральным показателем.

На рисунках 220, 221 изображены графики степенных функций при некоторых целых отрицательных показателях.

Задание 2. Пользуясь графиками функций (рис. 220, 221), расскажите о свойствах степенной функции с целым отрицательным показателем.

На рисунках 222, 223 изображены графики степенных функций с дробными показателями.

На рисунке 224 приведен график функции $y = x^{\sqrt{2}}$, а на рисунке 225 — график функции $y = x^{-\sqrt{2}}$.

Задание 3. Пользуясь графиками функций (рис. 222—225), расскажите о свойствах степенной функции с дробным и иррациональным показателем.

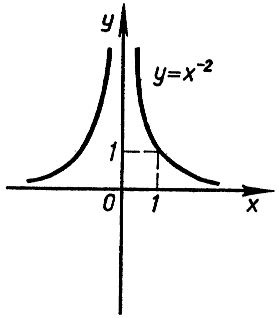


Рис. 220

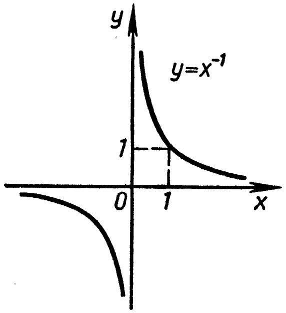


Рис. 221

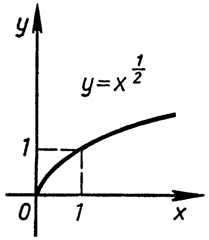


Рис. 222

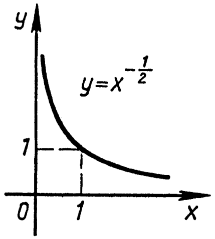


Рис. 223

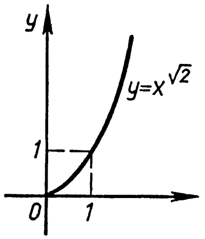


Рис. 224

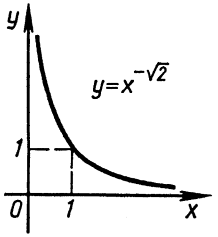


Рис. 225

Задание 4. Постройте графики функций: $y=x^5$; б) $y=x^{\frac{1}{3}}$; в) $y=x^{-\frac{1}{3}}$.

Перейдем к нахождению производной степенной функции. Ранее мы дифференцировали некоторые степенные функции. Например, $(x^2)'=2x$, $x\in \boldsymbol{R}$; $(x^3)'=3x^2$, $x\in \boldsymbol{R}$; $(x^{-4})'=-4x^{-5}$, $x\neq 0$; $(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $x>0$. При этом мы пользовались формулой $(x^\alpha)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$, не зная ее доказательства для любых действительных значений α. Сейчас рассмотрим доказательство этой формулы для значений $x>0$ и любых действительных значений α.

Теорема. ***Для значений $x>0$ и любых действительных значений α верна формула***

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Доказательство. Запишем основное логарифмическое тождество: $e^{\ln x}=x$. Возведем обе его части в степень α, получим: $x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$.

По правилу вычисления производной сложной функции имеем:

$$(x^\alpha)'=(e^{\alpha\ln x})'=e^{\alpha\ln x}\cdot(\alpha\ln x)'=(e^{\ln x})^\alpha\cdot\frac{\alpha}{x}=$$
$$=x^\alpha\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}.$$

Итак,

$$(x^\alpha)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}.$$

Упражнения

1. Расскажите, как определяется степенная функция.

2. На рисунке 226 приведены графики степенной функции $y=x^\alpha$ для случаев $\alpha=1$; $0<\alpha<1$, $x\geqslant 0$; $\alpha>1$, $x\geqslant 0$. Анализируя графики этих функций, укажите общие их свойства и различные свойства.

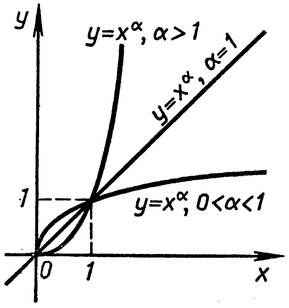


Рис. 226

3. Найдите интервалы возрастания и убывания функции $y=x^n$, $n\in \boldsymbol{N}$, если: а) n — четное число; б) n — нечетное число.

4. Вычислите производные функций: а) $y=x^{-3,1}$; б) $y=x^{-2}$; в) $y=x^{\sqrt{2}}$; г) $y=x^{3,5}$.

5. Докажите, что функции $y=x^{\frac{2}{3}}$ и $y=x^{\frac{3}{2}}$ взаимно обратны. Постройте графики этих функций.

6. Постройте график функции $y=x^{\frac{1}{3}}$ и с его помощью решите уравнение и неравенства: а) $x^{\frac{1}{3}}=3$; б) $x^{\frac{1}{3}}<3$; в) $\sqrt[3]{x}>3$.

7. Постройте графики функций: а) $y=\sqrt{x}$; б) $y=\sqrt{-x}$; в) $y=-\sqrt{x}$; г) $y=\sqrt{|x|}$.

§ 90. ПОВТОРЕНИЕ

1. Выполните действия:

а) $\dfrac{3^{-1}\cdot 3^0+15\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}-4}$;

б) $\dfrac{\left(-\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+2^{-3}}{15\cdot 15^0-(0,1)^{-1}}$;

в) $(4a^{-3}b-0,125^{-1}\cdot a^{-2}+4a^{-1}b^{-1})\cdot 2^{-2}ab^{-1}$;

г) $(0,04a^{-3}b^2-\frac{2}{25}a^{-2}b+5^{-2}a^{-1}):5^{-2}a^{-1}b^2$;

д) $\left(\dfrac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}\right)\cdot(a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{4}})^{-1}$;

е) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}\cdot\dfrac{a-\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):4\sqrt{ab}$;

ж) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

з) $\dfrac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}-\left(\dfrac{a+\sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ax}}-\sqrt[4]{ax}\right)$.

2. Среди следующих иррациональных чисел найдите наибольшее число: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$, $\dfrac{1}{\sqrt[4]{4}}$, $\dfrac{1}{\sqrt[5]{5}}$.

3. Сравните числа:

а) $\left(\frac{1}{8}\right)^{10}$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$; б) $\log_4 3$ и $\log_3 4$; в) $\log_7 3$ и $\log_5 9$; г)* $\dfrac{10^{1966}+1}{10^{1967}+1}$ и $\dfrac{10^{1967}+1}{10^{1968}+1}$; д)* $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$ и $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$.

4. На рисунках 227—229 изображены эскизы графиков функции $y=x^p$ для различных $p\in \boldsymbol{R}$. Для каждого случая установите возможные промежутки значений показателя p.

5. На рисунках 230, 231 изображены графики функции $y=a^x$, а на рисунках 232, 233 — графики функции $y=\log_a x$. Для каждого случая установите возможные промежутки значений основания a.

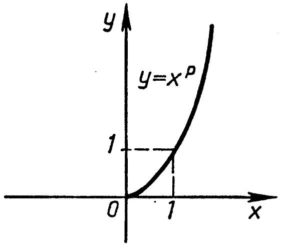


Рис. 227

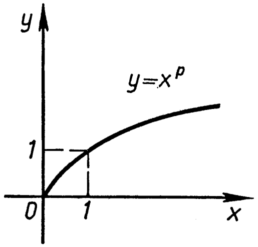


Рис. 228

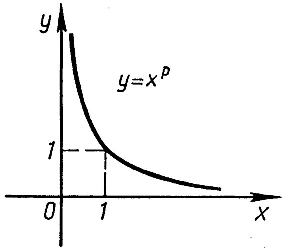


Рис. 229

6. Постройте в одной и той же системе координат графики двух функций и расскажите о сходстве и различии их свойств: а) $y=(0{,}3)^x$ и $y=\left(\frac{1}{0{,}3}\right)^x$; б) $y=\pi^x$ и $y=\left(\frac{1}{\pi}\right)^x$; в) $y=\log_5 x$ и $y=\log_{\frac{1}{5}} x$.

7. Не строя графика функции $y=\left(\frac{1}{8}\right)^x$, определите, как изменяется y с возрастанием x от -3 до 0. Вычислите значение y при $x=\frac{1}{3}$.

8. Не строя графика функции $y=\left(\frac{1}{9}\right)^{-x}$, определите, как изменяется y с возрастанием x от -9 до -3. Вычислите значение y при $x=-\frac{1}{6}$.

9. Найдите наибольшие и наименьшие значения функций:

а) $y=3^{\cos x}$; б) $y=2^{1-\sin x}$;

в)* $y=5+5^{|\sin x|}$; г)* $y=\frac{10}{5^{\cos x}}$.

10. С помощью производной найдите промежутки, в которых существует функция, обратная для функции:

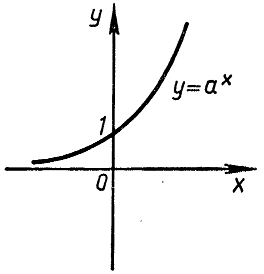


Рис. 230

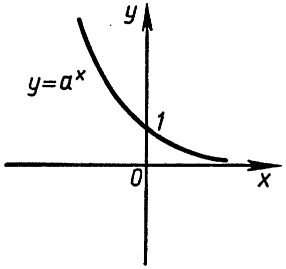


Рис. 231

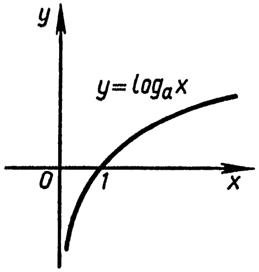


Рис. 232

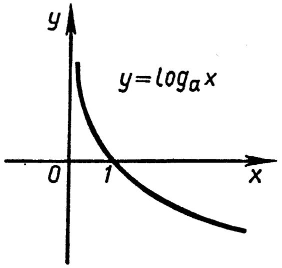


Рис. 233

а) $y=\frac{1}{3}x^3-x+1$; б) $y=-\frac{1}{3}x^3+4x-5$.

11. Для данной функции найдите обратную и постройте их графики в одной и той же системе координат: а) $y=2^x-1$; б) $y=2^{x-1}$.

12. Докажите, что последовательность значений функции $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ при натуральных значениях аргумента x есть геометрическая прогрессия.

13. При каких значениях x: а) последовательность $\lg x$, $\lg(x+6)$, $\lg(2x+7)$ будет арифметической прогрессией; б) последовательность x, $\sqrt[4]{10x}$, $x^{\lg x}$ будет геометрической прогрессией?

14. Найдите области определения функций:

а) $y=2^{\frac{1}{1-x}}$; б) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-9}}$;

в) $z(x)=\frac{4}{7^{x^2}}$; г) $y=\log_4(x+1)$;

д) $g(x)=\lg|x|$; е) $f(x)=\log_{0,1}(x-2)$;

ж) $y=\log_{2\pi}(2-3x)$; з) $y=\lg(6+x-x^2)$;

и) $y=\log_{1,5}(x^2+4x+4)$; к) $z=\ln(5-3x-2x^2)$;

л) $f(x)=\lg(4-x)+\lg\sqrt{1-x}$; м) $y=\lg\cos x$;

н)* $f(x)=\log_{0,2}\frac{4x-8}{3-6x^2}$; о)* $y=\log_a\sin x$.

15. Вычислите:

а) $\lg\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\lg\cos 0$; б) $\lg\sin\frac{\pi}{2}\log_2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\log_2 1$;

в) $\log_3\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}+2\log_3\sin\frac{\pi}{2}+\log_2\sin\frac{\pi}{4}$;

г) $\sqrt{3}^{\,\log_3 4+\log_{\sqrt[4]{3}}\sqrt{2}}$; д) $2^{\log_{\sqrt{2}}\sqrt{3}+\log_4 9}$;

е) $100^{1-\lg\frac{5}{2}}$.

16. Вычислите при помощи микрокалькуляторов или таблиц логарифмов:

а) $x=\frac{5{,}084\cdot\sqrt[4]{0{,}00315}}{0{,}065912}$; б) $x=\frac{\sqrt{\cos^3 37°\,13'\cdot 0{,}001582}}{\operatorname{tg}^2 62°\,22'}$;

в) $x=\frac{\sin^3 42°\,19'\,\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 51°\,52'}}{\operatorname{tg}^4 76°\,37'}$; г) $x=\sqrt[3]{\frac{0{,}1103+\sqrt[4]{0{,}05513}}{7{,}212}}$.

17. Решите неравенства:

а) $0{,}6^{\frac{x^2+9}{x+3}}>1$; б) $7{,}2^{\frac{x^2+6x+11}{x-3}}-1<0$;

в) $x^{2x-1}>1$; г) $\log_3\frac{3x-1}{3x+8}>0$;

д) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x}{2x-1} < 0$; е) $\log_{\frac{1}{2}} (3x - 7{,}5) < 1$;

ж) $\log_4 (2x - 5) > 0{,}5$; з) $\log_2 \frac{x^2-1}{(x-2)^2} > 0$;

и)* $\log_{0,3} (x^2 + 2) < \log_{0,3}(3x - 7)$; к)* $\log_2|2x - 5| < 1$.

18. Решите уравнения:

а) $5^x \cdot 2^x = (10^{x-1})^5 \cdot 0{,}1$; б) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{9}{16}$;

в) $4^{2-x} = 3^{x-2}$; г) $9^{x+2} = 13^{2x-1}$;

д) $2^{1+2\sin x\cos x} = 2\sqrt{2}$; е) $3^{-1+\sin x - \sin^2 x + \ldots} = \frac{1}{9}$;

ж) $7^{x+2} - \frac{1}{7} \cdot 7^{x+1} - 14 \cdot 7^{x-1} + 2 \cdot 7^x = 48$;

з) $9^{x+1} - 4 \cdot 3^x - 69 = 0$; и) $3 \cdot 2^{2(\sqrt{x}-1)} - 2^{\sqrt{x}} = 8$;

к) $2 \cdot 3^{\frac{1}{2x}} - 3^{\frac{1}{x}} - 27 = 0$; л) $9^{\frac{1}{x}} - 6^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{1}{x}}$.

19. Решите графически уравнения:

а) $3^{-x} = 3$; б) $2^x = x^2 - 2x$; в) $10^x = \sin x$; г)* $2^x = \sqrt{4 - x^2}$.

20. Решите неравенства:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x+5} < 32$; б) $2^{5-6x} > \frac{1}{8}$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} > 3^{-\frac{x}{2}}$;

г) $3^{x^2-x-6} < 1$; д) $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} \leqslant 315$;

е) $4^{\sqrt{x+1}} \leqslant 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$; ж)* $|x|^{x^2-x-2} < 1$; з)* $3^{x-1} > \frac{2-3^x}{3^x-4}$;

и)* $\frac{1}{2^x+3} > \frac{1}{2^{x+3}+1}$.

21*. Докажите, что $3^{\frac{x}{96}} + 3^{-\frac{x}{96}}$ не меньше 2 при любых значениях переменной x.

22. Существуют ли такие значения x, при которых принимают равные значения функции:

а) $y = 2^{x+4} + 2^{x+3} + 2^x$ и $y = 5^{x+1} - 5^x$;

б) $y = x^{\lg x - 1}$ и $y = 10\sqrt{x}$?

23. Решите уравнения:

а) $\log_4 \sin x = -\frac{1}{2}$; б) $\log_{100} \log_2 (x - 1) = \frac{1}{2}$;

в) $\log_2 \log_3 \ln (x + 1) = 0$; г) $\log_{2x-1} (3x^2 - 4x + 5) = 2$;

д) $\lg 2x + \lg(5x - 15) = 2$; е) $\lg^2 x - \lg \sqrt{x} = 0{,}5$;

ж) $\frac{1}{4 - \lg_{0,2} x} + \frac{2}{2 + \log_{0,2} x} = 1$;

з) $2\lg^4 x + 2\log_5^2 0{,}2 = 2{,}5 + \frac{3}{2}\lg^2 x$;

и) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 5{,}5$;

к) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$.

24. Решите уравнения:

а) $2^{\log_6(-2x)} = \log_3 81$; б) $4^{\log_x \frac{1}{3}} = 0{,}5$;

в) $4^{2\lg x} \cdot 5^{\lg x} = 6400$; г) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\lg^2 x - \lg x} = \frac{1}{125} \cdot 5^{\lg x - 1}$;

д) $5^{\lg x} - 3^{-1+\lg x} = 3^{1+\lg x} - 5^{-1+\lg x}$;

е) $\lg\left(10^x + \sin x - \frac{1}{2}\right) = x$;

ж) $\log_2\left(2^x + \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x$;

з) $\log_3\left(\log_9 x + \frac{1}{2} + 9^x\right) = 2x$;

и) $\log_2 (17 - 2^x) + \log_2 (2^x + 15) = 8$;

к) $9^{\log_{25} x^2} + \log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(9^{1+\log_{25} x} - 9^{\log_{25} x}\right)$;

л) $x^{\lg\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right)} = 1$.

25. Решите графически уравнения:

а) $\log_3 x = x - 1$; б) $\log_2 x = x^2 - 2$; в) $\lg x = 2^{-x}$;

г) $\lg x = \sqrt{x}$; д) $\ln x - \cos x = 0$.

26. Докажите неравенства:

а) $\log_3 5 + \log_5 3 > 2$; б) $\log_3 \pi + 4\log_\pi 3 > 4$.

27*. Решите неравенства:

а) $\log_{\frac{1}{2}}\left(4\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right) < -1$;

б) $\lg 2 + \log_2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) < -\lg 5$;

в) $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 \frac{1+2x}{1+x} > 0$;

г) $\frac{1}{2}\log_3 (x + 1) - \log_3 \sqrt{x+4} \leqslant -2 + \log_3 4{,}5$;

д)* $\frac{1}{2}\log_7(x - 6) - \log_7 \sqrt{x-3} > \log_7 \frac{49}{2} - 2$;

е) $\frac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} > 1$;

ж) $\lg 2 + \lg (4^{x-2} + 9) \leqslant \ln e + \lg (2^{x-2} + 1)$;

з) $\sqrt{\log_2 \frac{3-2x}{1-x}} < 1$;

и) $0{,}8^{\log_2^2 x - 1} \leqslant 0{,}64^{2+\log_{\sqrt{2}} x}$;

к) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}\frac{3x-1}{2x+3}} > \ln e$;

л) $x^{\lg x} \geqslant 0{,}1x^2$.

28. Решите графически неравенства:

а) $2^{-x} > 2 - x$; б) $2^x + 1 < -2x$;

в) $\log_3 x > \sin x$; г) $\lg x \leqslant x^2 - 3$.

29. Найдите производные функций:

а) $y = 0{,}3x^5 - 2x^4 - 10$; б) $y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$;

в) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}$; г) $y = 4\sqrt[4]{x} - 6\sqrt[3]{x^2}$;

д) $y = (1 - x^3)(x - 5) + \frac{3}{\sqrt{x}} + 1$.

30. Найдите производные функций: а) e^{2x}; б) $2e^{-\frac{1}{2}x}$; в) $\frac{4}{e^{2x}}$; г) $\left(\frac{2}{e^{3x}}\right)^2$; д) $e^{2\cos x}$; е) $e^{3\operatorname{tg} x}$; ж) 2^x; з) 5^{-7x}; и) $\frac{8}{4^{2x}}$; к) $\left(\frac{2}{1{,}3^{2x}}\right)^2$; л) $(0{,}7)^{x^2-5x+3}$; м) $6^{-3\operatorname{ctg} x}$; н) $e^{3x} + 4^{-x}$; о)* $\frac{7x}{\cos x + 4}$; п)* $\frac{\sqrt{x}}{\cos x}$.

31. Найдите производные функций: а) $\log_3 x$; б) $\log_{0,5} x$; в) $\log_{0,2}(2x - 5)$; г) $\log_5(6 - 7x)$; д) $\lg 10x$; е) $\ln(\cos x)$; ж) $\ln \operatorname{tg} x$; з)* $2^x \ln(3x)$; и) $5 \cdot 3^{x+1} + \log_2(2x - 1)$; к) $\frac{\ln 2x}{\sin x}$; л) $\frac{\sqrt{x}+1}{\ln 3x}$; м) $10^x \cdot \ln x$; н) $x^n \ln(4x + 9)$; о) $\log_5(x^3 + 2\sqrt{x} - 4)$.

32. Напишите уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0, если:

а) $f(x) = x^{2,5}$, $x_0 = 1$; б) $f(x) = (-x)^{1,5}$, $x_0 = -1$;

в) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$; г) $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$, $x_0 = 2$;

д) $f(x) = 2^{-x}$, $x_0 = 1$; е) $f(x) = \ln(3x)$, $x_0 = \frac{1}{3}$;

ж) $f(x) = \lg(5x)$, $x_0 = \frac{1}{5}$.

33. Найдите величину угла, образованного касательной к кривой $y = \ln x$ в точке $(1;\ 0)$ с положительным направлением оси абсцисс.

34. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции: а) $f(x) = 12x^2 - x^3$; б) $f(x) = e^{x^3-3x+2}$; в) $f(x) = 3^{x^2-2x}$; г)* $f(x) = x\ln^2 x$; д)* $f(x) = \frac{1}{2}e^x \cos x$.

35. Докажите, что следующая функция не имеет ни максимума, ни минимума: а) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 2$; б) $y = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$.

36. Схематически изобразите график функции, предварительно исследовав ее: а) $y = x^3 - 9x$; б) $y = -\frac{1}{4}x^4 - x^2$; в) $y = 4x^3 - 3x^4$; г) $y = 2^{x^2-2x}$; д) $y = \log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{4} - 1$;

е) $y = \begin{cases} 2x + 1, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 2^x, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

§ 91. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Вычислите:

$$(5{,}6)^0 + 0{,}027^{-\frac{1}{3}} - 3^{-1} + 256^{0,75} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}.$$

2. Найдите производные функций:

а) $y = 3 \cdot 4^x$; б) $y = e^{-2x}\cos 3x$; в) $y = \ln(4x - x^2)$;

г) $y = 2x^{10}$; д) $y = \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$.

3. Постройте графики функций:

а) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; б) $y = \log_2(x + 2)$; в) $y = -\sqrt[3]{x}$.

4. Решите уравнения:

а) $3^x - 2 \cdot 3^{x-1} = 3$; б) $\log_3(2x^2 - 9) - \log_3 x = 1$.

5. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 3^x$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$. Выполните схематический рисунок.

6. Решите неравенства:

а) $\sqrt{0{,}3^{x-3}} > 0{,}09^{\frac{1}{2}}$; б) $\log_2(3 - x) < -1$.

7. Вычислите с помощью таблиц десятичных логарифмов:

$$\frac{0{,}732^2}{2{,}183^3 \cdot \sqrt{0{,}3574}}.$$

Глава IX.
ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

§ 92. ПОНЯТИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ ФУНКЦИИ

Под дифференцированием функции $f(x)$ понимают нахождение ее производной $f'(x)$. Рассмотрим примеры дифференцирования функций.

1. Если $f(x)=x^3$, то $f'(x)=3x^2$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$.

2. Если $f(x)=x\sqrt{x}$, то $f'(x)=(x^{\frac{3}{2}})'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$ для всех $x>0$.

3. Если $f(x)=\cos 3x$, то $f'(x)=-\sin 3x\cdot(3x)'=-3\sin 3x$ для всех $x\in\boldsymbol{R}$.

4. Выше мы решали также задачи на нахождение скорости и ускорения прямолинейного движения, зная закон изменения координаты $x(t)$ материальной точки: $v(t)=x'(t)$, $a(t)=v'(t)=x''(t)$.

Так, при свободном падении тела в начальный момент времени $t=0$, скорость $v(0)=0$. Путь вычисляется по формуле $s(t)=\frac{gt^2}{2}$, а скорость и ускорение находят при помощи дифференцирования: $v(t)=s'(t)=gt$, $a(t)=v'(t)=g$.

Важно уметь решать задачи, обратные рассмотренным выше, именно находить функцию $f(x)$ по заданной ее производной $f'(x)$. Например, в механике часто приходится определять координату $x(t)$, зная закон изменения скорости $v(t)$, а также скорость $v(t)$, зная закон изменения ускорения $a(t)$.

Нахождение функции $f(x)$ по данной ее производной $f'(x)$ называют операцией интегрирования.

Таким образом, операция интегрирования обратна операции дифференцирования. Операция интегрирования состоит в том, что по заданной производной $f'(x)$ находят (восстанавливают) функцию $f(x)$ (латинское слово integratio означает «восстановление»).

Пример 1. Пусть $f'(x)=3x^2$. Найдем $f(x)$. Опираясь на правило дифференцирования, можно догадаться, что $f(x)=x^3$. Действительно, $(x^3)'=3x^2$. Однако нетрудно заметить, что $f(x)$ находится неоднозначно. В качестве $f(x)$ могут быть взяты функции $f(x)=x^3+1$, $f(x)=x^3-\sqrt{2}$, $f(x)=x^3+3{,}2$ и другие, так как производная каждой из них равна $3x^2$. Все эти функции отличаются друг от друга постоянным слагаемым. Поэтому общее решение задачи можно записать в виде $f(x)=x^3+C$, где C — произвольное действительное число. Любую из найденных функций $f(x)$ называют первообразной для функции $f'(x)=3x^2$.

Определение. **Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке I, если для всех x из этого промежутка $F'(x)=f(x)$.**

Так, функция $F(x)=x^3$ есть первообразная для функции $f(x)=3x^2$ на промежутке $]-\infty;\ \infty[$, так как для всех $x\in\boldsymbol{R}$ справедливо равенство

$$F'(x)=(x^3)'=3x^2.$$

Данная функция $f(x)=3x^2$, как было показано выше, имеет бесконечное множество первообразных.

Множество всех первообразных для функции $f(x)$ можно представить в виде $F(x)+C$, где $C\in\boldsymbol{R}$.

Примечание. Для удобства записи решений задач множество всех первообразных функции $f(x)$ будем иногда обозначать символом $F(x)$. Например, множество первообразных для функции $f(x)=4x^3$ будем записывать в виде $F(x)=x^4+C$.

Пример 2. Функция $F(x)=\sqrt{x}$ есть первообразная для функции $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ на промежутке $]0;\ \infty[$, так как для всех x из этого промежутка выполняется равенство

$$F'(x)=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Пример 3. Функция $F(x)=e^x$ есть первообразная для $f(x)=e^x$ на промежутке $]-\infty;\ \infty[$, так как для всех $x\in\boldsymbol{R}$ справедливо равенство

$$F'(x)=(e^x)'=e^x=f(x).$$

Пример 4. Функция $F(x)=3\sin 4x+\frac{1}{x}+2$ есть первообразная для функции $f(x)=12\cos 4x-\frac{1}{x^2}$ на промежутке $]0;\ \infty[$, так как для всех x из этого промежутка

$$F'(x)=\left(3\sin 4x+\frac{1}{x}+2\right)'=3\cos 4x\,(4x)'-1\cdot x^{-2}=12\cos 4x-\frac{1}{x^2}.$$

Упражнения

1. Сформулируйте определение первообразной функции.

2. Найдите производные следующих функций:

а) $f(x)=x^5$; б) $f(x)=c$; в) $f(x)=x^{-\frac{2}{3}}$;

г) $f(x)=x^n$, где $n \in \boldsymbol{N}$; д) $f(x)=x^{\alpha}$, где $x>0$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$;

е) $f(x)=\sin x$; ж) $f(x)=\cos x$; з) $\varphi(x)=\operatorname{tg} x$;

и) $g(x)=e^x$; к) $h(x)=a^x$; л) $f(x)=\ln x$;

м) $f(x)=\log_a x$.

В упражнениях 3—9 докажите, что функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если:

3. а) $F(x)=3x^4$, $f(x)=12x^3$, $]-\infty;\ \infty[$;

б) $F(x)=4x^5$, $f(x)=20x^4$, $]-\infty;\ \infty[$.

4. а) $F(x)=0{,}3x^{-3}$, $f(x)=-0{,}9x^{-4}$, $]-\infty;\ 0[$;

б) $F(x)=-0{,}4x^{-2}$, $f(x)=0{,}8x^{-3}$, $]0;\ \infty[$.

5. а) $F(x)=2\sqrt[3]{x}$, $f(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $]0;\ \infty[$;

б) $F(x)=\sqrt{-x}$, $f(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}$, $]-\infty;\ 0[$.

6. а) $F(x)=-\sin x+1$, $f(x)=-\cos x$, $]-\infty;\ \infty[$;

б) $F(x)=\cos x-2$, $f(x)=-\sin x$, $]-\infty;\ \infty[$.

7. а) $F(x)=3\operatorname{tg} x$, $f(x)=\dfrac{3}{\cos^2 x}$, $\left]-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right[$;

б) $F(x)=2\operatorname{ctg} x$, $f(x)=-\dfrac{2}{\sin^2 x}$, $]0;\ \pi[$.

8. а) $F(x)=3\ln x$, $f(x)=\dfrac{3}{x}$, $]0;\ \infty[$;

б) $F(x)=\ln(-x)$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $]-\infty;\ 0[$;

в) $F(x)=\log_2 x$, $f(x)=\dfrac{1}{x\ln 2}$, $]0;\ \infty[$.

9. $F(x)=\sin^2 x$, $f(x)=\sin 2x$, $]0;\ \infty[$.

10. Найдите одну из первообразных для каждой из следующих функций: а) $f(x)=5$, б) $f(x)=-1$; в) $f(x)=x^2$; г) $f(x)=\cos x$.

11. Является ли функция $\dfrac{1}{x}$ первообразной для функции $-\dfrac{1}{x^2}$ на промежутке $]0;\ 2[$?

12. Является ли функция $\dfrac{1}{x}$ первообразной для функции $-\dfrac{1}{x^2}$ на промежутке $]-2;\ 2[$?

§ 93. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ПЕРВООБРАЗНОЙ ФУНКЦИИ

Выше было замечено, что данная функция имеет бесконечное множество первообразных.

Справедлива следующая теорема, выражающая основное свойство первообразной функции.

Теорема. ***Если $F(x)$ одна из первообразных для функции $f(x)$ на промежутке I, то множество всех первообразных этой функции имеет вид: $F(x)+C$, где C — любое действительное число.***

Доказательство. Пусть $F'(x)=f(x)$, тогда $(F(x)+C)'=(F(x))'+(C)'=f(x)$ для всех $x \in I$. А это означает, что при любом постоянном C функция $F(x)+C$ есть первообразная для $f(x)$ на I.

Пусть функция $\Phi(x)$ — другая первообразная для $f(x)$ на I, т. е. $\Phi'(x)=f(x)$. Тогда $(\Phi(x)-F(x))'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$, $(\Phi(x)-F(x))'=0$ для всех $x \in I$. Это означает, что $\Phi(x)-F(x)$ постоянна на промежутке I. Следовательно, $\Phi(x)-F(x)=C$, откуда $\Phi(x)=F(x)+C$.

Этим доказано, что если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на промежутке I, то множество всех первообразных для $f(x)$ имеет вид: $F(x)+C$, где $C \in \boldsymbol{R}$.

Подчеркнем еще раз, что выражение $F(x)+C$ исчерпывает множество всех первообразных для заданной функции $f(x)$. Любые две первообразные данной функции отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

При доказательстве теоремы мы опирались на утверждение: если на промежутке I производная $\varphi'(x)$ функции $\varphi(x)$ равна нулю, то на этом промежутке функция $\varphi(x)$ постоянна. Это общее утверждение, называемое признаком постоянства функции, можно иллюстрировать геометрически. Известно, что $\varphi'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона касательной к графику функции $\varphi(x)$ в точке с абсциссой x_0 (рис. 234). Если $\varphi'(x)=0$ в любой точке промежутка I, то $\operatorname{tg}\alpha=0$ для любой касательной к графику функции $\varphi(x)$. Это означает, что касательная к графику функции в любой его точке параллельна оси абсцисс. Поэтому на ука-

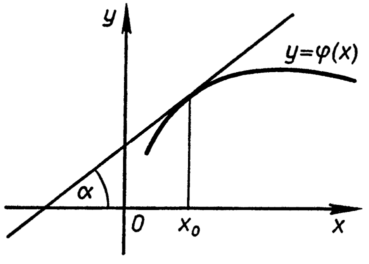


Рис. 234

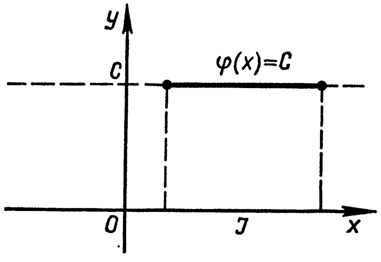


Рис. 235

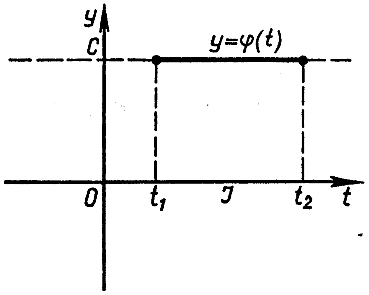


Рис. 236

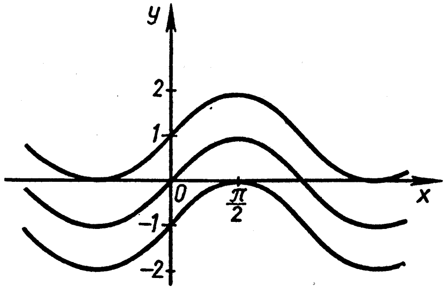


Рис. 237

занном промежутке график функции $\varphi(x)$ совпадает с отрезком прямой $y = C$ (рис. 235).

Признак постоянства функции имеет также физическую интерпретацию. Пусть функция $\varphi(t)$ задает закон движения точки по прямой. Рассмотрим эту функцию на промежутке $I = [t_1;\ t_2]$. Известно, что $v(t) = \varphi'(t)$. Если $\varphi'(t) = 0$, то $v(t) = 0$. Скорость материальной точки в любой момент времени t равна 0, это означает, что в рассматриваемом промежутке времени материальная точка находилась в состоянии покоя. Если, например, в момент времени t_1 $\varphi(t_1) = C$, то на промежутке времени I график функции $\varphi(t)$ будет отрезком, параллельным оси t (рис. 236).

Признак постоянства функции: функция $f(x) = C$ — постоянная на промежутке I, если $f'(x) = 0$ на этом промежутке.

Пример 1. Найдите множество первообразных функции $f(x) = \cos x$. Изобразите графики трех первообразных.

Решение. Одна из первообразных для функции $\cos x$ есть $\sin x$. Множество всех первообразных имеет вид: $F(x) = \sin x + C$. В частности, можно назвать следующие первообразные: $F_1(x) = \sin x$, $F_2(x) = \sin x + 1$, $F_3(x) = \sin x - 1$ (рис. 237).

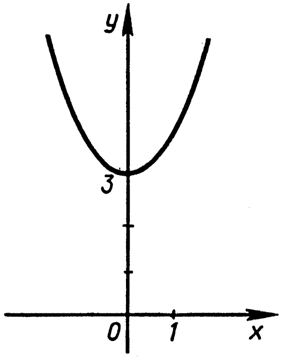


Рис. 238

Геометрически основное свойство первообразной $\Phi(x) = F(x) + C$ для некоторой функции можно проиллюстрировать следующим образом: график любой первообразной $F(x) + C$ можно получить из графика первообразной $F(x)$ при помощи параллельного переноса $\vec{r} = (0;\ C)$.

Пример 2. Для функции $f(x) = 2x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку (1; 4). Выполните схематический рисунок.

Решение. Множество всех первообразных данной функции имеет вид: $F(x) = x^2 + C$. По условию задачи $F(1) = 4$, следовательно, $1^2 + C = 4$, $C = 3$, $F(x) = x^2 + 3$ (рис. 238).

Пример 3. Скорость точки, движущейся прямолинейно, изменяется по закону $v(t) = 2t + 1$ (в м/с). Найдите путь, пройденный точкой за промежуток времени от $t = 1$ до $t = 4$, если известно, что в момент времени $t = 1$ путь равен 3 м.

Решение. Пусть путь, пройденный точкой за промежуток времени t, равен $s(t)$. Известно, что $s'(t) = v(t)$, $s(t)$ есть первообразная для $v(t)$, следовательно, $s(t)$ можно найти при помощи интегрирования: $s'(t) = 2t + 1$, $s(t) = t^2 + t + C$ (справедливость этого ответа проверьте дифференцированием). По условию задачи $s(1) = 3$, следовательно, $3 = 1 + 1 + C$, $C = 1$, $s(t) = t^2 + t + 1$. Подставим в выражение $s(t)$ значение $t = 4$: $s(4) = 16 + 4 + 1 = 21$; $s(4) - s(1) = 21 - 3 = 18$.

Ответ: 18 м.

Рассматривая таблицу производных функций, составим таблицу первообразных функций:

Функция $f(x)$	Множество ее первообразных $F(x)$
k (const)	$kx + b$
x^α, $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
x^{-1}, $x > 0$	$\ln x + C$
x^{-1}, $x < 0$	$\ln(-x) + C$
e^x	$e^x + C$
a^x, $a > 0$, $a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$

Правильность записи в таблице множества первообразных может быть проверена дифференцированием. Например:

$$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C;\ F'(x) = \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\right)' = \frac{(\alpha+1)x^\alpha}{\alpha+1} = x^\alpha = f(x),\ \alpha \neq -1.$$

Проверьте правильность записей всех первообразных в таблице.

Упражнения

1. Сформулируйте основное свойство первообразной функции. Проиллюстрируйте его геометрически на примере.

2. Сформулируйте признак постоянства функции на промежутке.

3. Объясните признак постоянства функции, используя геометрический смысл производной.

4. Объясните признак постоянства функции, используя механический смысл производной.

5. Для данной функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через заданную точку A:

а) $f(x) = x^4$; $A(-1;\ 0)$, постройте график функции $f(x)$;

б) $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $A(1;\ 2)$;

в) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $A\left(\frac{1}{2};\ -2\right)$, постройте график функции $F(x)$;

г) $f(x)=\frac{1}{x}$, где $x>0$, $A(1;\ -1)$, постройте графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

д) $f(x)=x^{-1}$, где $x<0$, $A(-1;\ 0)$, постройте график функции $F(x)$;

е) $f(x)=\sin x$, $A(\pi;\ 2)$;

ж) $f(x)=\cos x$, $A\left(\frac{\pi}{2};\ 2\right)$, постройте графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

з) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, $A\left(\frac{\pi}{4};\ -1\right)$;

и) $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$, $A\left(\frac{\pi}{6};\ 0\right)$;

к) $f(x)=e^x$, $A(0;\ 4)$, постройте график функции $f(x)$;

л) $f(x)=2^x$, $A\left(0;\ \frac{2}{\ln 2}\right)$;

м) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $A(0;\ 0)$.

§ 94. ТРИ ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ПЕРВООБРАЗНЫХ

В предыдущем параграфе была приведена таблица первообразных некоторых функций. В этом параграфе мы установим правила, позволяющие находить первообразные различных функций, составленных из приведенных в таблице.

Теорема 1. ***Первообразная суммы двух функций равна сумме первообразных этих функций, рассматриваемых на одном и том же промежутке.***

Доказательство. Пусть $F(x)$ есть первоообразная для $f(x)$ на промежутке I, т. е. $F'(x)=f(x)$; $G(x)$ есть первообразная для $g(x)$ на этом же промежутке I, т. е. $G'(x)=g(x)$. Докажем, что $F(x)+G(x)$ есть первообразная для $f(x)+g(x)$ на промежутке I, т. е.

$$(F(x)+G(x))'=f(x)+g(x).$$

Используя правила дифференцирования суммы двух функций, находим:

$$(F(x)+G(x))'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x).$$

Теорема справедлива для суммы любого конечного числа функций.

Пример 1. Найдите множество всех первообразных для функции $f(x)=x^2+\sqrt{x}$.

Решение. Одна из первообразных функции x^2 есть $\frac{1}{3}x^3$. Одна из первообразных функции $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ есть $\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$. Множество всех первообразных данной функции имеет вид: $F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$, где $x\in\ ]0;\ \infty[$.

Примечание. Первообразная $\frac{1}{3}x^3$ определена на множестве $I_1=\ ]-\infty;\ \infty[$, первообразная $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ определена на множестве $I_2=\ ]0;\ \infty[$. Каждая из первообразных данной функции определена на множестве $I=I_1\cap I_2=\ ]0;\ \infty[$.

В упражнениях на нахождение первообразных сумм функций имеется в виду, что все первообразные рассматриваются на одном и том же промежутке, на котором рассматривается и первообразная суммы, поэтому отыскивать этот промежуток не надо.

Теорема 2. ***Первообразная произведения числа на функцию равна произведению этого числа на первообразную данной функции.***

Доказательство. Пусть $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$, k — данное число. Докажем, что $k\cdot F(x)$ есть первообразная функции $kf(x)$.

Используя правило вынесения постоянного множителя за знак производной, находим: $(kF(x))'=kF'(x)=kf(x)$.

Пример 2. Найдите множество всех первообразных для функции $f(x)=5\cos x$.

Решение. Одна из первообразных функции $\cos x$ есть $\sin x$, поэтому множество всех первообразных данной функции имеет вид: $F(x)=5\sin x+C$.

Теорема 3. ***Если $F(x)$ есть одна из первообразных функции $f(x)$, а k и b — постоянные, причем $k\neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ есть одна из первообразных функции $f(kx+b)$.***

Доказательство. Известно, что $F'(x)=f(x)$, тогда $\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)'=\frac{1}{k}F'(kx+b)=\frac{1}{k}f(kx+b)(kx+b)'=f(kx+b)$.

Пример 3. Найдите множество первообразных функции $f(x)=\sin(3x-4)$.

Решение. Одна из первообразных $f(x)$ есть функция $F_1(x)=-\frac{1}{3}\cos(3x-4)$. Множество всех первообразных данной функции имеет вид: $F(x)=-\frac{1}{3}\cos(3x-4)+C$.

Упражнения

1. Найдите множество первообразных функций:

а) $f(x) = -7x + 4$; б) $f(x) = ax + b$;

в) $f(x) = 3x^2 + 4$; г) $f(x) = 2x^2 + 3x - 8$;

д) $f(x) = ax^2 + bx + c$; е) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

2. Найдите множество первообразных функций:

а) $f(x) = \frac{3}{x^2} - 2\sin 3x$; б) $f(x) = \frac{3}{\sin^2 2x}$;

в) $f(x) = 4 + \frac{1}{\cos^2 3x}$; г) $f(x) = 3\cos\frac{x}{4} - 2\sin 4x$;

д) $f(x) = e^{2x-3}$; е) $f(x) = 2^{0,5x+1}$;

ж) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{4x-1}}$; з) $f(x) = \frac{2}{4x-1}$, где $x > 0,25$.

§ 95. КРИВОЛИНЕЙНАЯ ТРАПЕЦИЯ И ЕЕ ПЛОЩАДЬ

В предыдущих классах мы научились вычислять площади треугольника, прямоугольника, параллелограмма, трапеции, произвольного многоугольника, т. е. площади фигур, границами которых являются ломаные линии. Научились также вычислять площадь круга и его частей (сектора, сегмента).

В математике разработаны методы, позволяющие вычислять площади фигур, границы которых состоят из кривых линий, например частей парабол, синусоид и др. (если, конечно, площади этих фигур существуют).

Теперь, используя знания о первообразной функции, мы научимся находить площади фигур, называемых криволинейными трапециями.

На рисунках 239—244 штриховкой выделены различные криволинейные трапеции.

Определение. **Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей на отрезке $[a;\ b]$ знака функции $f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a;\ b]$.**

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $f(x)$ (рис. 245), прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a;\ b]$ оси абсцисс. Вначале рассмотрим случай $f(x) > 0$.

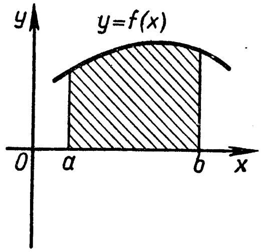


Рис. 239

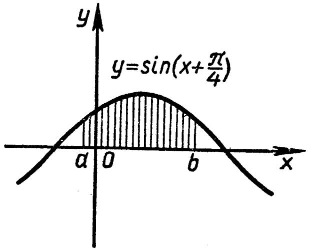


Рис. 240

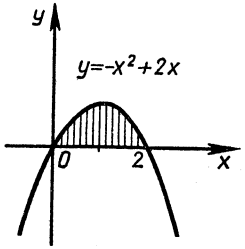


Рис. 241

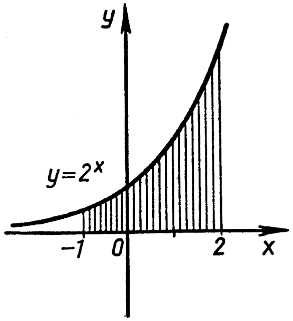


Рис. 242

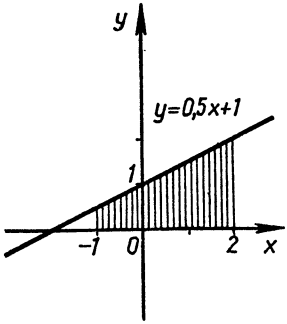


Рис. 243

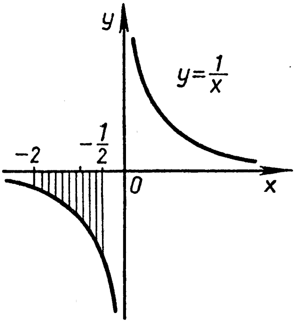


Рис. 244

Пусть $x \in [a;\ b]$. Площадь криволинейной трапеции, заштрихованной на рисунке, есть функция от x. Обозначим ее через $S(x)$.

Ниже будет показано, что $S'(x) = f(x)$. Это равенство означает, что переменная площадь $S(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$. Поэтому площадь криволинейной трапеции S может быть вычислена при помощи интегрирования. Из рисунка видно, что $S(a) = 0$, так как заштрихованная фигура при $x = a$ превращается в отрезок, $S(b) = S$ есть площадь рассматриваемой криволинейной трапеции. В случае $f(x) < 0$ (рис. 246) вычисление площади криволинейной трапеции будем заменять вычислением площади трапеции, симметричной данной относительно оси абсцисс. Такая криволинейная трапеция ограничена прямыми $x = a$, $x = b$, осью абсцисс, графиком функции $y = -f(x)$, принимающей положительные значения на рассматриваемом промежутке.

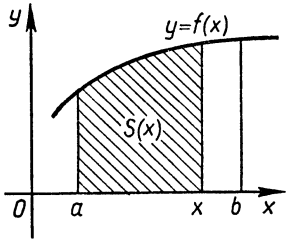


Рис. 245

▶ Когда говорят о непрерывности функции $f(x)$ на промежутке $[a;\ b]$, то под этим понимают непрерывность ее в каждой точке этого промежутка, в том числе в точках a и b, т. е. что $\lim f(x) = f(a)$ при стремлении x справа к a и $\lim f(x) = f(b)$ при стремлении x слева к b. ◀

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислите площадь трапеции, заштрихованной на рисунке 247. Установите связь между $S'(x)$ и $f(x)$.

Решение. Мы имеем дело с обычной прямоугольной трапецией, так как графиком функции $f(x) = 2x$ является прямая

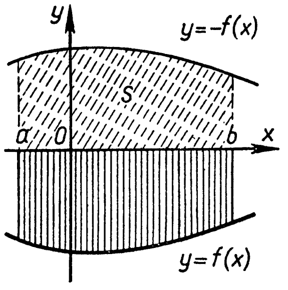


Рис. 246

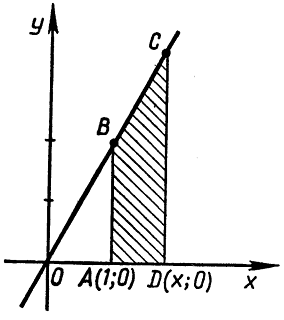


Рис. 247

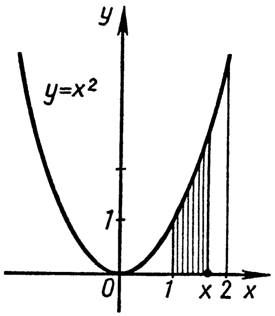


Рис. 248

линия. По известной из геометрии формуле найдем площадь этой трапеции:

$$S=\frac{|AB|+|CD|}{2}\cdot|AD|,$$

но $|AB|=2\cdot 1=2$, $|CD|=2x$, $|AD|=x-1$,

$$S(x)=\frac{2+2x}{2}\cdot(x-1)=(x+1)(x-1)=x^2-1.$$

Найдем $S'(x)$: $S'(x)=(x^2-1)'=2x$. Замечаем, что $S'(x)=f(x)$.

Пример 2. Используя равенство $S'(x)=f(x)$, вычислите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=x^2$, $x=1$, $x=2$, $y=0$.

Решение. Пусть $x\in[1;\ 2]$ (рис. 248). Так как $S'(x)=f(x)$, то $S'(x)=x^2$. Таким образом, $S(x)$ есть первообразная для функции $f(x)=x^2$. Найдем множество таких первообразных: $S(x)=\frac{x^3}{3}+C$. Значение постоянной C можно найти из условия $S(1)=0$, $0=\frac{1}{3}+C$, $C=-\frac{1}{3}$.

Таким образом, $S(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}$. Площадь данной криволинейной трапеции получим при $x=2$: $S(2)=\frac{2^3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$.

Пример 3. Используя равенство $S'(x)=f(x)$, вычислите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y=\sin x$; $y=0$, $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ (рис. 249).

Решение. На заданном промежутке график функции $y=\sin x$ лежит под осью абсцисс. Поэтому вычисление площади этой трапеции заменим вычислением площади трапеции, симметричной данной относительно оси абсцисс, т. е. ограниченной графиком функции $y=-\sin x$ и осью абсцисс.

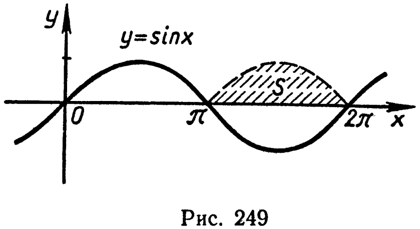


Рис. 249

$S'(x)=-\sin x$, $S(x)=$ $=\cos x+C$, $S(\pi)=0$; $0=\cos\pi+C$, $C=1$.

Таким образом, $S(x)=$ $=\cos x+1$. $S(2\pi)=\cos 2\pi+$ $+1=1+1=2$.

Ответ: $S=2$ (кв. ед.).

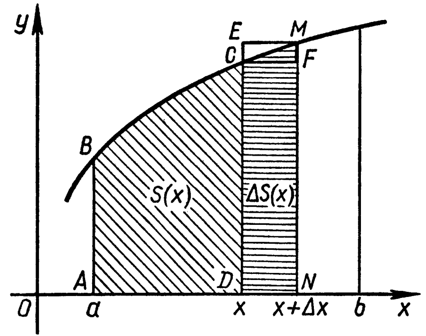


Рис. 250

Поясним подробнее смысл равенства $S'(x)=f(x)$, принятого выше без доказательства (рис. 250).

Для простоты рассуждений рассмотрим функцию $f(x)$, непрерывную и возрастающую на отрезке $[a;\ b]$. Площадь криволинейной трапеции $ABCD$ будет также непрерывной функцией от x, обозначим ее $S(x)$. Дадим x некоторое приращение $\Delta x>0$, тогда $S(x)$ получит приращение $\Delta S(x)$. Найдем $\Delta S(x)$:

$$S(x)=S_{ABCD},\ S(x+\Delta x)=S_{ABMN},\ \Delta S(x)=S_{DCMN},$$
$$\Delta S(x)=S(x+\Delta x)-S(x).$$

Пользуясь рисунком, заметим, что:

$$S_{DCFN}<S_{DCMN}<S_{DEMN},$$
$$f(x)\,\Delta x<\Delta S(x)<f(x+\Delta x)\,\Delta x,$$
$$f(x)<\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}<f(x+\Delta x).$$

В силу непрерывности функции $f(x)$ имеем: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)=f(x)$. Функция $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}$ заключена между двумя функциями $f(x)$ и $f(x+\Delta x)$, имеющими один и тот же предел $f(x)$ при $\Delta x\to 0$. Поэтому предел $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0$ также равен $f(x)$ (см. § 16, теорема 5). Получили, что $\boldsymbol{S'(x)=f(x)}$.

Упражнения

1. Сформулируйте определение криволинейной трапеции.

2. Какие из заштрихованных на рисунках 251—257 фигур являются криволинейными трапециями, а какие не являются?

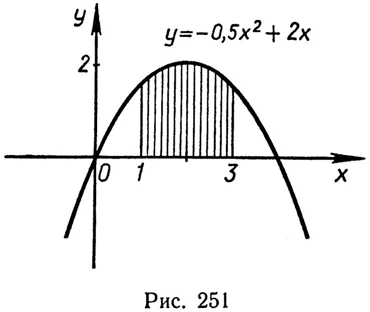


Рис. 251

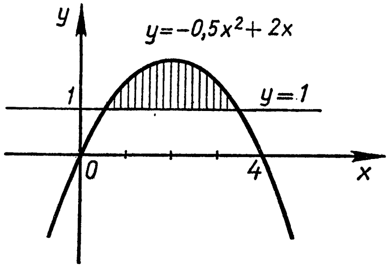


Рис. 252

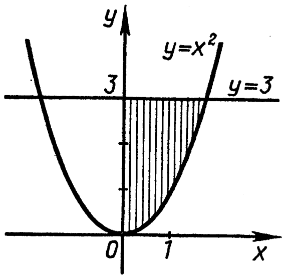


Рис. 253

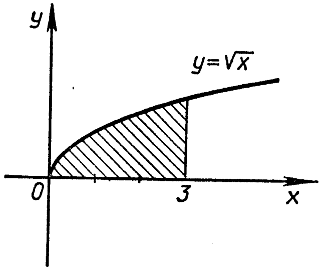


Рис. 254

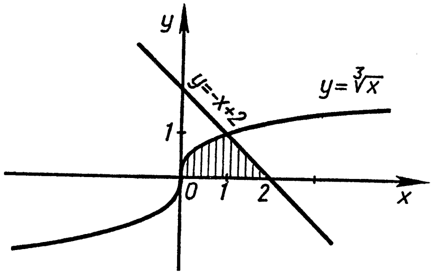


Рис. 255

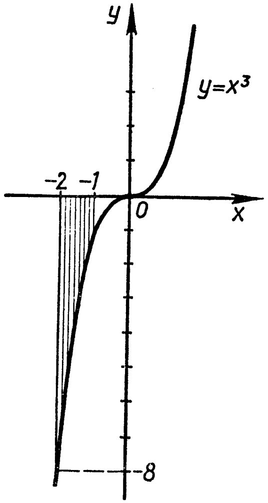


Рис. 256

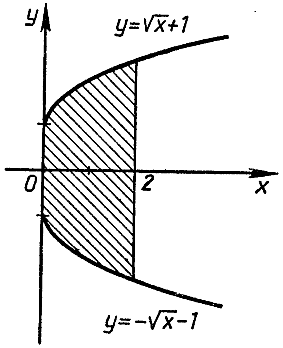


Рис. 257

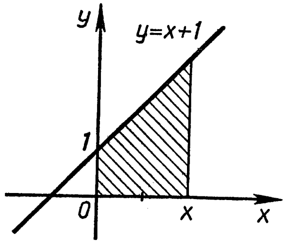


Рис. 258

3. Для фигуры, заштрихованной на рисунке 258 (ограниченной линиями $y=x+1$, $y=0$, $x=0$ и прямой, проходящей через точку $(x; 0)$ параллельно оси ординат), докажите справедливость равенства $S'(x)=f(x)$.

§ 96. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ

Используя равенство $S'(x)=f(x)$, где $f(x)\geqslant 0$ на промежутке $[a; b]$, выведем формулу для вычисления площади криволинейной трапеции (рис. 259). Из этого равенства видно, что $S(x)$ есть первообразная для $f(x)$ на промежутке $[a; b]$. Пусть $F(x)$ — другая первообразная для $f(x)$ на этом же промежутке. В силу основного свойства первообразных имеем: $S(x)=F(x)+C$. Это равенство верно при всех $x\in[a; b]$, так как функции $S(x)$ и $F(x)$ определены в точках a и b. Подставим вместо x число a, получим: $S(a)=F(a)+C$. Но $S(a)=0$, поэтому $0=F(a)+C$, откуда $C=-F(a)$. Таким образом, $S(x)=F(x)-F(a)$. Искомую площадь получим путем подстановки в последнее равенство $x=b$:

$$\boldsymbol{S=F(b)-F(a)}.$$

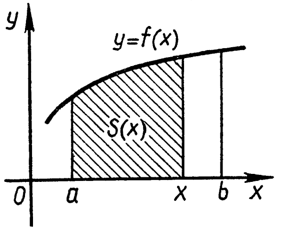


Рис. 259

Пример 1. Постройте криволинейную трапецию, ограниченную линиями $f(x)=\frac{1}{x}$, $x=1$, $x=2$, $y=0$ и вычислите ее площадь.

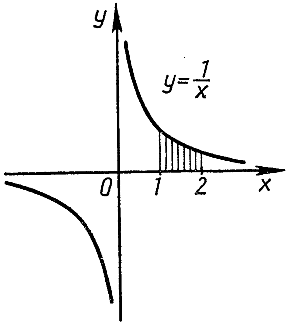


Рис. 260

Решение. Криволинейная трапеция изображена на рисунке 260. Одна из первообразных для функции $f(x)=\frac{1}{x}$ есть $F(x)=\ln x$.

$$S=F(2)-F(1),\ S=\ln 2-\ln 1=\ln 2\approx 0{,}7.$$

Пример 2. Вычислите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$.

Решение. На промежутке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ значения $f(x)$ положительны. Одна из первообразных для функции $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ есть $F(x)=\operatorname{tg} x$. Следовательно, $S=F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F(0)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg} 0=1$.

Пример 3. Постройте криволинейную трапецию, ограниченную линиями $y=\cos x$, $y=0$, $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$, и вычислите ее площадь.

Решение. Криволинейная трапеция изображена на рисунке 261. Вычислим площадь криволинейной трапеции, ограни-

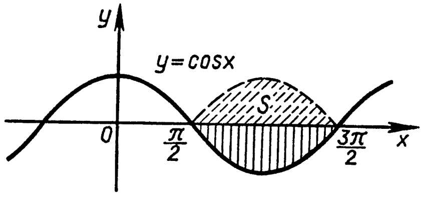


Рис. 261

ченной линиями $y=-\cos x$, $y=0$, $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$. Одна из первообразных функции $y=-\cos x$ есть $F(x)=-\sin x$, $S=F\left(\frac{3\pi}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\left(\sin\frac{3\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right)=2$.

Ответ: $S=2$ (кв. ед.).

Упражнения

В упражнениях 1—5 вычислите площади фигур, ограниченных линиями:

1. а) $y=x^2$, $y=0$, $x=2$; б) $y=x^3$, $y=0$, $x=2$.
2. а) $y=\sin x$, $y=0$, $0\leqslant x\leqslant\pi$; б) $y=\cos x$, $y=0$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$.
3. а) $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$; б) $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=9$.
4. а) $y=\frac{2}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=3$; б) $f(x)=\frac{1}{x\ln 2}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$.
5. а) $y=2^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$; б) $f(x)=3^x$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$.

§ 97. ПОНЯТИЕ ИНТЕГРАЛА

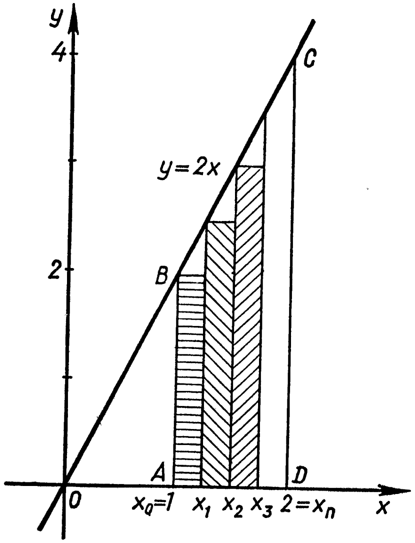


Рис. 262

Вернемся к задаче вычисления площади криволинейной трапеции. Рассмотрим другой способ вычисления ее площади. Вначале решим примеры.

Пример 1. Вычислите площадь трапеции, ограниченной линиями $y=2x$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.

Решение. Площадь этой трапеции (рис. 262) можно вычислить по известной из курса геометрии формуле:

$$S=\frac{|AB|+|CD|}{2}\cdot|AD|,$$

$$S=\frac{2+4}{2}\cdot 1=3.$$

Однако для вычисления площади этой трапеции применим другой способ, который нам позволит находить площади любых криволинейных трапеций.

Разделим отрезок [1; 2] на n отрезков равной длины. Обозначим абсциссы точек деления через $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$, а соответствующие ординаты через $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}$. На каждом из этих отрезков построим прямоугольник, как это показано на рисунке 262.

Высота прямоугольника, построенного на отрезке $[x_0; x_1]$, равна $y_0=f(x_0)$, высота прямоугольника, построенного на отрезке $[x_1; x_2]$, равна $y_1=f(x_1)$ и т. д., высота прямоугольника, построенного на отрезке $[x_{n-1}; x_n]$, равна $y_{n-1}=f(x_{n-1})$. Длина основания каждого прямоугольника равна $\frac{1}{n}$.

Объединение всех n прямоугольников есть некоторая ступенчатая фигура (рис. 262). Площадь этой ступенчатой фигуры обозначим через S_n. Тогда

$$S_n=\frac{1}{n}\cdot f(x_0)+\frac{1}{n}\cdot f(x_1)+\frac{1}{n}\cdot f(x_2)+\dots+\frac{1}{n}\cdot f(x_{n-1})= \qquad (1)$$
$$=\frac{1}{n}(2x_0+2x_1+2x_2+\dots+2x_{n-1})=\frac{2}{n}(x_0+x_1+x_2+\dots+x_{n-1}).$$

В скобках получили сумму членов арифметической прогрессии (a_n), у которой $a_1=1$, $d=\frac{1}{n}$, n — число членов.

Найдем эту сумму по формуле суммы членов арифметической прогрессии: $S=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$; $S=\frac{2\cdot 1+\frac{1}{n}(n-1)}{2}\cdot n=\frac{2n+n-1}{2}=\frac{3n-1}{2}$. Подставим значение S в равенство (1), получим:

$$S_n=\frac{2}{n}\cdot\frac{3n-1}{2}=\frac{3n-1}{n}.$$

При неограниченном увеличении числа делений отрезка [1; 2] и стремлении при этом к нулю длины каждого из них площадь ступенчатой фигуры сколь угодно близко приближается к площади данной трапеции. Естественно предположить, что площадь S рассматриваемой трапеции выражается формулой

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n,$$

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)=3-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=3-0=3.$$

Как видим, результаты подсчета площади трапеции различными способами совпали.

Пример 2. Вычислите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $f(x)=x^2$, $y=0$, $x=1$.

Решение. Применим способ, приведенный в решении первого примера. Отрезок $[0;\ 1]$ разделим на n отрезков равной длины и на каждом из них построим прямоугольник, как это показано на рисунке 263. Длина основания каждого прямоугольника равна $\frac{1}{n}$. Высоты прямоугольников соответственно равны: $f(x_1)=x_1^2$, $f(x_2)=x_2^2$, $f(x_3)=x_3^2$ и т. д., $f(x_{n-1})=x_{n-1}^2$.

Найдем площадь ступенчатой фигуры:

$$S_{n-1}=\frac{1}{n}f(x_1)+\frac{1}{n}f(x_2)+\frac{1}{n}f(x_3)+\ldots+\frac{1}{n}f(x_{n-1})=$$

$$=\frac{1}{n}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_{n-1}^2).$$

Из рисунка видно, что

$$x_1=\frac{1}{n},\ x_2=2\cdot\frac{1}{n}=\frac{2}{n},\ x_3=3\cdot\frac{1}{n}=\frac{3}{n},\ \ldots,\ x_{n-1}=\frac{n-1}{n},$$

тогда

$$S_{n-1}=\frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\frac{3^2}{n^2}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)=\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}.$$

Существует следующая формула для вычисления суммы квадратов n первых натуральных чисел: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Применим эту формулу для вычисления суммы квадратов первых $(n-1)$ натуральных чисел. Для этого заменим в указанной формуле n на $n-1$, получим:

$$S_{n-1}=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\frac{1}{6}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{2n-1}{n}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right).$$

Естественно предположить, что площадь S криволинейной трапеции есть предел площади ступенчатой фигуры при $n\to\infty$:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{6}\cdot1\cdot2=\frac{1}{3}.$$

Заметим, что эту задачу можно решить и по формуле $S=F(b)-F(a)$:

$$f(x)=x^2,\ F(x)=\frac{1}{3}x^3,\ S=F(1)-F(0),\ S=\frac{1}{3}.$$

Рассмотренный в примерах способ вычисления площади криволинейной трапеции можно применить к вычислению площади любой криволинейной трапеции.

Рассмотрим положительную и непрерывную на отрезке $[a;\ b]$ функцию $f(x)$. Разделим отрезок $[a;\ b]$ на n равных частей и обозначим абсциссы точек деления через $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n-1}$, а соответствующие ординаты через $y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_{n-1}$. На каждом из этих отрезков построим прямоугольник, как это показано на рисунке 264. Высота прямоугольника, построенного на отрезке $[x_0;\ x_1]$, равна $y_0=f(x_0)$; высота прямоугольника, построенного на отрезке $[x_1;\ x_2]$, равна $y_1=f(x_1)$; высота прямоугольника, построенного на отрезке $[x_2;\ x_3]$, равна $f(x_2)$ и т. д.; высота прямоугольника, построенного на отрезке $[x_{n-1};\ x_n]$, равна $f(x_{n-1})$.

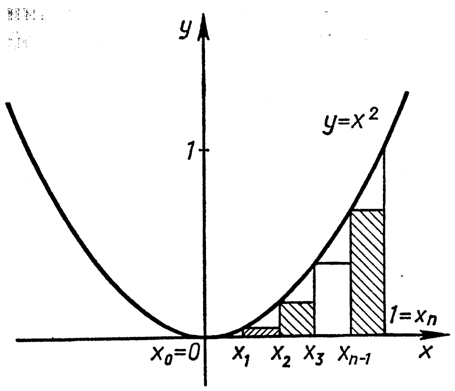


Рис. 263

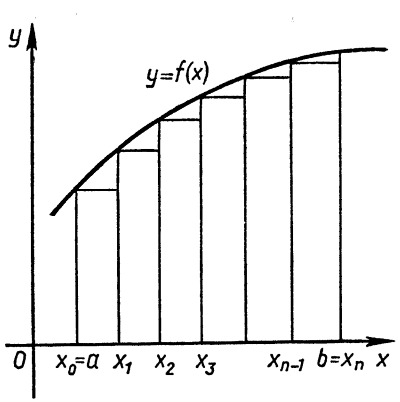


Рис. 264

Длина основания каждого прямоугольника равна $\frac{b-a}{n}$; обозначим $\frac{b-a}{n}=\Delta x$. Заметим, что $x_1-x_0=x_2-x_1=x_3-x_2=\ldots=x_n-x_{n-1}=\Delta x$. Объединение всех n прямоугольников есть некоторая ступенчатая фигура. Обозначим ее площадь через S_n, тогда

$$S_n=f(x_0)\Delta x+f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\ldots+f(x_{n-1})\Delta x. \qquad (2)$$

Это выражение можно записать короче: $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(x_k)\Delta x$.

Знак Σ (греческая буква «сигма») означает, что вычисляется сумма однотипно образованных членов. Давая букве k значения 0, 1, 2, 3, ..., $n-1$, получим первый, второй, третий и т. д. $(n-1)$-й члены рассматриваемой суммы. Сумму (2) называют интегральной суммой.

Опираясь на наглядное представление (см. рис. 264), предполагаем, что при неограниченном увеличении числа делений отрезка $[a;\ b]$ и стремлении к нулю длины каждого из них площадь ступенчатой фигуры сколь угодно близко приближается к площади данной трапеции. Тем самым принимаем без строгого обоснования существование предела $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

Определение. **Интегралом функции $f(x)$ от a до b называется предел интегральной суммы: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.**

Интеграл обозначается так: $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ — и читается: «интеграл от a до b эф от икс дэ икс».

В обозначении интеграла все указывает на способ его образования. Знак интеграла напоминает удлиненную латинскую букву S — первую букву слова summa (сумма). Латинское слово integer означает «весь, целый». Подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ напоминает вид каждого отдельного слагаемого $f(x_k)\,\Delta x$ интегральной суммы. Множитель dx в математике называют дифференциалом. Число a называется нижним пределом интегрирования, а число b верхним пределом. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Упражнения

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x$, $y=0$, $x=1$, при помощи составления интегральной суммы, разделив отрезок $[0;\ 1]$ на n равных частей.

2. Вычислите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $f(x)=0{,}5x^2$, $y=0$, $x=1$, при помощи составления интегральной суммы, разделив отрезок $[0;\ 1]$ на n равных частей.

§ 98. ФОРМУЛА НЬЮТОНА—ЛЕЙБНИЦА

Из изложенного выше (см. § 97) следует, что предел интегральных сумм, т. е. $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, для неотрицательной и непрерывной на промежутке $[a;\ b]$ функции $f(x)$ равен площади S соответствующей криволинейной трапеции $S=\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

С другой стороны, площадь криволинейной трапеции можно вычислить по формуле $S=F(b)-F(a)$, где $F(x)$ — одна из первообразных для $f(x)$ (см. § 96). Сравнивая эти две формулы, получаем:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

Это равенство называется формулой Ньютона—Лейбница. Для удобства вычислений формулу Ньютона—Лейбница записывают так:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Пример 1. Вычислите $\int\limits_1^2 x^2dx$.

Решение. $\int\limits_1^2 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}=$ $=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$.

Пример 2. Вычислите $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$.

Решение. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$ $=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1-0=1$.

Пример 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^3$, $y=0$, $x=1$, $x=2$ (рис. 265).

Решение. $S=\int\limits_1^2 x^3\,dx=\frac{x^4}{4}\Big|_1^2=$ $=\frac{2^4}{4}-\frac{1^4}{4}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$.

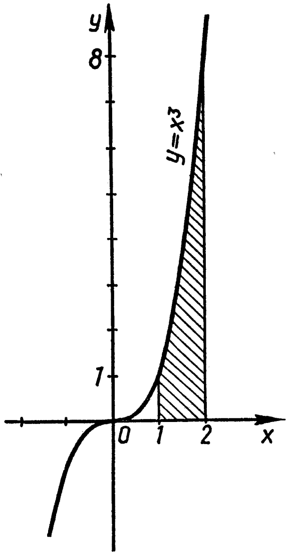


Рис. 265

Упражнения

1. Изобразите схематически фигуры, площади которых выражаются следующими интегралами: а) $\int\limits_0^1 x\,dx$; б) $\int\limits_1^2 2x\,dx$; в) $\int\limits_0^1 2x^2dx$; г) $\int\limits_2^3 x^2\,dx$; д) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$. Найдите площадь каждой из этих фигур.

2. Используя график функции $y=\sqrt{1-x^2}$, объясните, почему $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$.

В упражнениях 3—7 вычислите интегралы:

3. а) $\int\limits_{-2}^1 x^4dx$; б) $\int\limits_1^3 x^3\,dx$.

4. а) $\int\limits_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x\,dx$.

5. а) $\int\limits_1^4 x\sqrt{x}\,dx$; б) $\int\limits_1^8 x\sqrt[3]{x}\,dx$.

6. а) $\int\limits_{-3}^{-1}\frac{dx}{x^2}$; б) $\int\limits_1^3\frac{dx}{x^3}$.

7. а) $\int\limits_0^{\pi}(x^2+2\sin x)\,dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(x^3-3\cos x)\,dx$.

В упражнениях 8—11 вычислите площади фигур, ограниченных линиями:

8. а) $y=-x^2+4$, $y=0$;
б) $y=x^2-3x$, $y=0$.

9. а) $y=e^x$, $x=-1$, $x=1$, $y=0$;
б) $y=2^x$, $x=-1$, $x=2$, $y=0$.

10. а) $y=\sin x$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{2\pi}{3}$;
б) $y=\cos x$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{3}$.

11. а) $y=\frac{1}{x+1}$, $x=0$, $x=2$, $y=0$;
б) $y=\frac{1}{x-1}$, $x=2$, $x=3$, $y=0$.

§ 99. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Нам известно, что при вычислении площади криволинейной трапеции необходимо вычислять интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Но для вычисления этого интеграла необходимо знать функцию $f(x)$ и пределы интегрирования a и b.

Если требуется вычислить площадь фигуры, ограниченной несколькими линиями, то находят криволинейные трапеции, пересечение или объединение которых есть данная фигура, вычисляют площадь каждой из них и находят разность или сумму площадей этих криволинейных трапеций.

Задача 1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=-x+2$.

Решение. Изобразим схематически графики данных функций (рис. 266). Замечаем, что искомая площадь есть разность площадей двух криволинейных трапеций: $S=S_{ABCD}-S_{ABOCD}$.

Из рисунка видно, что пределы интегрирования для обеих трапеций одни и те же, это абсциссы общих точек графиков данных функций. Для нахождения пределов интегрирования решим уравнение:

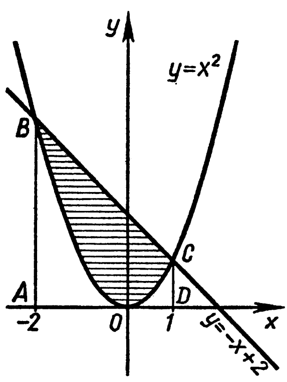


Рис. 266

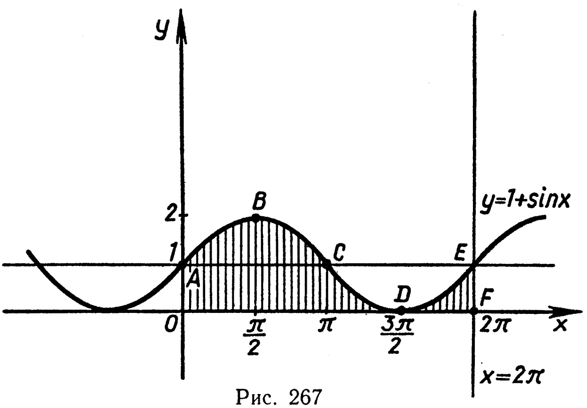


Рис. 267

$$x^2=-x+2,\ x^2+x-2=0,\ x=-2 \text{ или } x=1.$$

Найдем искомую площадь:

$$S=\int\limits_{-2}^{1}(-x+2)\,dx-\int\limits_{-2}^{1}x^2\,dx=\left(-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-2}^{1}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{1}=$$
$$=\left(-\frac{1}{2}+2\right)-\left(-\frac{4}{2}-4\right)-\frac{1}{3}-\frac{8}{3}=1{,}5+6-3=4{,}5.$$

Ответ: 4,5 (кв. ед.).

Задача 2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=1+\sin x$, $x=0$, $y=0$, $x=2\pi$.

Решение. Из рисунка 267 замечаем, что искомую площадь $S_{OABCDEF}$ можно вычислить при помощи интеграла:

$$S=\int\limits_0^{2\pi}(1+\sin x)\,dx=(x-\cos x)\Big|_0^{2\pi}=$$
$$=(2\pi-\cos 2\pi)-(0-\cos 0)=2\pi-1+1=2\pi.$$

Ответ: 2π (кв. ед.).

Полученный ответ очевиден: фигуры *ABCA* и *CDEC* симметричны относительно точки *C*, поэтому они равновелики. Искомая площадь равна площади прямоугольника *OAEF*, длины сторон которого 1 и 2π.

Задача 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\cos x$, $y=0$, если $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$ (рис. 268).

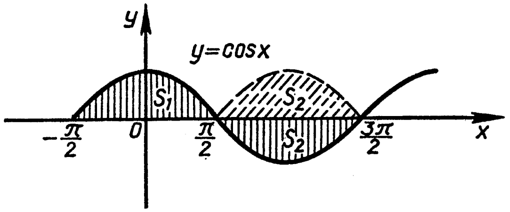


Рис. 268

Решение. $S_1=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\sin x\,\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=$

$=\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1-(-1)=2.\quad S_2=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(-\cos x)\,dx=2,$

$S=S_1+S_2.$

Ответ: 4 (кв. ед.).

Задача 4. Вычислите объем фигуры, образованной вращением фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=1$, $x=4$, вокруг оси абсцисс (рис. 269).

Решение. Искомый объем V равен разности объемов V_1 и V_2 двух фигур, образованных вращением криволинейных трапеций $ABCK$ и $ABDK$: $V=V_1-V_2$.

Из курса геометрии известна следующая формула для вычисления объема фигуры вращения

$$V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx.$$

Применим эту формулу к вычислению объема V_1. Найдем пределы интегрирования. Из уравнения $\sqrt{x}=1$ находим $x=1$, $|OA|=1$.

$$V_1=\pi\int\limits_1^4(\sqrt{x})^2\,dx=\pi\int\limits_1^4 x\,dx=\frac{\pi x^2}{2}\Big|_1^4=\pi\left(8-\frac{1}{2}\right)=7{,}5\pi.$$

Фигура, образованная вращением прямоугольника $ABDK$, есть цилиндр, поэтому $V_2=\pi R^2H$, где $R=|AB|=1$, $H=|AK|=4-1=3$, $V_2=\pi\cdot 1^2\cdot 3=3\pi$, $V=V_1-V_2$, $V=7{,}5\pi-3\pi=4{,}5\pi$.

Ответ: $V=4{,}5\pi$ (куб. ед.).

Задача 5. Найдите путь, пройденный точкой за промежуток времени от $t=0$ до $t=5$, если скорость точки меняется по закону

$$v(t)=3t^2+2t+1.$$

Решение. Путь, пройденный точкой за промежуток времени от 0 до 5, есть

$$s(5)-s(0)=\int\limits_0^5 v(t)\,dt=\int\limits_0^5(3t^2+2t+1)\,dt=$$

$$=(t^3+t^2+t)\Big|_0^5=125+25+5=155.$$

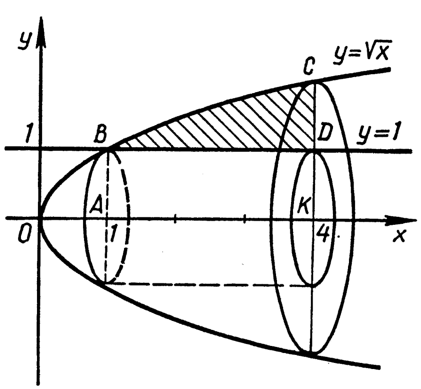


Рис. 269

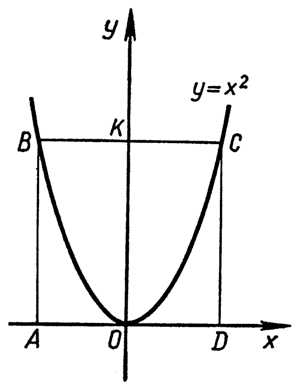


Рис. 270

Упражнения

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$ и прямой $y=-x$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и графиком функции $y=\begin{cases}x+1, & \text{если } x\leqslant 0,\\ -x^2+1, & \text{если } x>0.\end{cases}$

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2+2x+3$, прямой $y=4x$ и осью абсцисс, $x\geqslant 0$.

4. Докажите, что площадь параболического сегмента $BOCKB$ (рис. 270) равна двум третям площади прямоугольника $ABCD$.

5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^3$, $y=8$, $x=0$.

6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\cos x$, $y=0{,}5$, где $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

7. Тело движется со скоростью $v=(6t+2)$ (в м/с). Найдите длину пути, пройденного телом за 10 с от начала движения.

8. Тело движется прямолинейно с ускорением $a=(3t^2+2)$ (в м/с^2). Найдите закон движения тела, если в момент $t=1$ с скорость $v=3\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ и путь $s=5$ м.

9. Вычислите объем фигуры, образованной вращением криволинейной трапеции, ограниченной дугой гиперболы $y=\frac{4}{x}$, прямыми $x=1$, $x=4$ и осью абсцисс, вокруг оси абсцисс.

10. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\ln x$, $y=0$, $x=e$.

11. Вычислите площадь фигуры, ограниченной гиперболой $y=\frac{2}{x}$, осью абсцисс и прямыми $x=1$, $x=5$.

§ 100. ПОВТОРЕНИЕ

1. Напишите множество всех первообразных для функций:

а) $f(x)=8x-3$; б) $f(x)=\frac{1}{3}x^2+1$; в) $f(x)=2\cos x$.

2. Какие из функций $F_1(x)=x\cos x$, $F_2(x)=\sin^2 x$, $F_3(x)=7-\cos^2 x$, $F_4(x)=5\cos^2 x$, $F_5(x)=11-\frac{1}{2}\cos 2x$ являются первообразными для функции $f(x)=\sin 2x$?

3. Для функции $f(x)=6x^2-2x+5$ найдите первообразную $F(x)$, если известно, что $F(-2)=-20$.

4. Вычислите площадь $S(x)$ фигуры, ограниченной осью абсцисс, прямой $f(x)=2x+3$ и ординатами точек этой прямой, абсциссы которых равны 0 и $x>0$. Найдите производную $S'(x)$.

5. Вычислите интегралы:

а) $\int\limits_2^5 3\,dx$; б) $\int\limits_1^9 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$;

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin x\,dx$; г) $\int\limits_1^2 2^x\,dx$;

д) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$; е) $\int\limits_0^{\pi} 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$;

ж) $\int\limits_1^3 \frac{x^4+3x^2-7}{x^2}\,dx$; з) $\int\limits_1^4 \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x}}\,dx$;

и) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x-3\sin^2 x}{\sin x}\,dx$; к) $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)dx$;

л) $\int\limits_{2\frac{1}{3}\pi}^{2\frac{2}{3}\pi} \left(\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)dx$.

6. Пользуясь формулой Ньютона—Лейбница, докажите следующие основные свойства интеграла:

а) $\int\limits_a^a f(x)\,dx=0$;

б) $\int\limits_a^b f(x)\,dx=-\int\limits_b^a f(x)\,dx$;

в) $\int\limits_a^b kf(x)\,dx=k\int\limits_a^b f(x)\,dx$;

г) $\int\limits_a^b (f(x)+\varphi(x))\,dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx+\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$;

д) если $a<c<b$, то $\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

7. С помощью интеграла вычислите площадь треугольника, ограниченного прямыми $y-2x-6=0$, $y=0$, $x=1$. Проверьте ответ вычислением площади треугольника по формуле, известной из курса геометрии.

8. С помощью интеграла вычислите площадь трапеции, ограниченной прямыми $y=x+2$, $x=1$, $x=3$, $y=0$. Проверьте ответ вычислением по формуле, известной из курса геометрии.

9. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=(x+1)^2$ и прямыми $x=-4$, $y=0$.

10. Вычислите площадь параболического сегмента, отсекаемого от параболы $y=x^2-4x$ осью абсцисс.

11. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=3^x$, $x=0$, $x=\log_3 5$, $y=0$.

12. Найдите, при каких значениях k площадь фигуры, ограниченной параболой $f(x)=x^2+2kx+4$ и прямыми $x=-2$, $x=2$, $y=0$, можно вычислить по формуле $\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,dx$. Выберите одно из найденных значений k и вычислите указанный интеграл.

13. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\cos x$, $y=\cos x+2$, $x=-\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{4}$.

14. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$ и $y=x^3$.

15. Вычислите объем конуса, полученного вращением треугольника, ограниченного прямыми $y=3x$, $y=0$, $x=2$, вокруг оси абсцисс двумя способами: а) с помощью интеграла; б) по известной из курса геометрии формуле объема конуса.

16. Найдите, при каком значении параметра m площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{x}$, $x=e$, $x=m$ $(m>e)$, $y=0$, равна 2.

17. При каком значении параметра $d>0$ площадь фигуры, ограниченной линиями $y=3^x$, $x=0$, $y=0$, $x=d$, равна $\frac{1}{\ln 3}$?

18. При каком значении параметра $k>0$ площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\cos\frac{x}{2}$ $(0\leqslant x\leqslant \pi)$, $x=0$, $y=0$, $x=k$, равна 1?

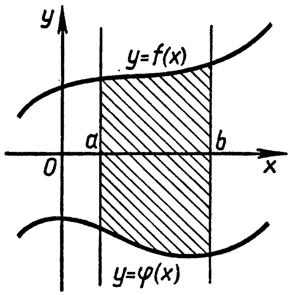


Рис. 271

19. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=(x+1)(2-x)$, $y=x+1$.

20. Вычислите площадь фигуры, ограниченной на отрезке $\left[\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}\right]$ графиками функций $y=\sin 2x$, $y=1-\sin 2x$.

21*. Найдите множество первообразных для функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

22*. Найдите множество всех первообразных для функций:

а) $f(x)=|x|$; б) $f(x)=|x-1|$.

23. Вычислите интегралы:

а) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{2\pi}\cos^2 2x\,dx$;

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)dx$; г) $\int\limits_{-3}^{4}\frac{dx}{\sqrt{3+\frac{x}{4}}}$.

24*. Вычислите площадь фигуры, ограниченной осями координат и линией $y=2-\frac{1}{4}x^3$.

25. Докажите, что площадь фигуры, ограниченной линиями $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$, $x=a$, $x=b$, где $f(x)>\varphi(x)$, равна $\int\limits_{a}^{b}(f(x)-\varphi(x))\,dx$ (рис. 271).

26*. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2+2$, $y=x$.

27*. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=\sin^2 3x+3$, $y=\sin^2 3x$, $x=1$, $x=3$;

б) $y=\sin^2 2x$, $y=-\cos^2 2x$, $x=-1$, $x=2$.

28*. Найдите такие числа A и B, чтобы функция вида $f(x)=A\sin\pi x+B$ удовлетворяла условиям: $f'(1)=2$ и $\int\limits_{0}^{2}f(x)\,dx=4$.

29*. Найдите, при каких значениях $a>0$ выполняется неравенство $\int\limits_{0}^{a}(4^x-2^{x+1})\,dx\geqslant 0$.

30*. При каком значении параметра $a>0$ площадь фигуры, ограниченной линиями $x=a$, $y=2^x$, $y=4^x$, больше либо равна площади фигуры, ограниченной линиями $y=2^x$, $y=0$, $x=0$, $x=a$?

31*. Найдите все числа $a>0$, для которых $\int\limits_{0}^{a}(2-4x+3x^2)\,dx\leqslant a$.

32*. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=x^2+4x+C$, где $C>0$, $x=0$, $x=2$, $y=0$, равна 12. Найдите значение C.

§ 101. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Докажите, что функция $F(x)=2\sqrt{x}-\frac{1}{x^2}+3$ есть первообразная для функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x^3}$ на промежутке $]0; \infty[$.

2. Для функции $f(x)=2\sin x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $(\pi; 0)$.

3. Найдите множество первообразных функций:

а) $f(x)=-3x^2+7$; б) $\varphi(x)=3\sin\frac{x}{2}$; в) $g(x)=e^{-2x}$.

4. Вычислите площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y=\cos x$, $x=-\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$;

б) $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$;

в) $y=\sqrt{x}$, $x=4$, $x=9$, $y=2$.

5. Вычислите интегралы:

а) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx$; б) $\int\limits_{1}^{2}x\sqrt[3]{x}\,dx$; в) $\int\limits_{0}^{1}e^{x+1}\,dx$.

Глава X.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

§ 102. ПОНЯТИЕ О РАВНОСИЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Как известно, уравнением с одной переменной называют равенство $f(x) = \varphi(x)$ двух функций, по отношению к которому ставится задача нахождения значений переменной, обращающих его в верное числовое равенство.

Число x_0 называется корнем уравнения $f(x) = \varphi(x)$, если, во-первых, это число принадлежит как области определения функции $f(x)$, так и области определения функции $\varphi(x)$ и, во-вторых, значения этих функций в точке x_0 совпадают.

Например, число 2 не является корнем уравнения $\frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = 2x + 1$, так как это число не принадлежит области определения функции $f(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{x-2}$, стоящей в левой части уравнения; число 5 не является корнем уравнения $x + 1 = 2x - 1$, так как значения функций, стоящих в левой и правой его частях, при $x = 5$ не равны:

$$f(5) = 5 + 1 = 6;\ \varphi(5) = 2 \cdot 5 - 1 = 9;\ f(5) \neq \varphi(5);$$

число 5 является корнем уравнения $|x| = x$, так как, во-первых, это число принадлежит области определения как функции $f(x) = |x|$, так и функции $\varphi(x) = x$, во-вторых, $f(5) = \varphi(5)$.

Вы уже умеете решать многие виды уравнений — алгебраические, тригонометрические, показательные, логарифмические.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что их не существует.

Множество корней уравнения зависит от того, на каком числовом множестве рассматривается данное уравнение. Например, уравнение $(x-2)(x^2-3) = 0$ на множестве рациональных чисел имеет только один корень $x = 2$; это же уравнение на множестве действительных чисел имеет три корня: $x_1 = 2$; $x_2 = \sqrt{3}$; $x_3 = -\sqrt{3}$. Поэтому если поставлена задача решить уравнение, то должно быть указано множество, на котором оно решается.

В пособии, если рассматриваемое числовое множество не указано, имеется в виду, что уравнение необходимо решить на множестве действительных чисел.

При решении уравнения над ним производят различные преобразования: раскрывают скобки, переносят члены из одной части в другую, приводят подобные члены и др.

В процессе этих преобразований данное уравнение последовательно заменяется другими уравнениями до тех пор, пока не придем к уравнению, решать которое мы умеем. При выполнении таких преобразований получается цепочка уравнений, в которой каждое новое уравнение может быть, а может и не быть равносильно предыдущему.

Напомним, что два уравнения называют равносильными, если множества корней этих уравнений совпадают. Когда в процессе решения уравнения мы уверены, что производимые преобразования не нарушают равносильности каждого из уравнений цепочки, множество решений последнего уравнения будет множеством решений данного уравнения. Поэтому в этом случае проверка корней уравнения не обязательна.

Однако может случиться, что преобразования нарушают равносильность уравнений. В этом случае нас могут подстерегать две опасности: мы можем «потерять» корни или «приобрести» посторонние корни. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решите уравнение $x^2 - \frac{1}{x} = 2x - \frac{1}{x}$ (1).

Решение. Перенесем все члены уравнения в его левую часть. Получим уравнение $x^2 - \frac{1}{x} - 2x + \frac{1}{x} = 0$ (2). Выполненное преобразование не нарушает равносильности уравнений. Теперь приведем подобные члены, получим: $x^2 - 2x = 0$ (3), $x(x-2) = 0$ (4); $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. В процессе приведения подобных членов (при переходе от (2) к (3)) была нарушена равносильность уравнений. В результате приобретен посторонний корень $x = 0$, который не является решением исходного уравнения, так как в него входит выражение $\frac{1}{x}$, теряющее смысл при $x = 0$; поэтому $x \neq 0$.

Ответ: 2.

Рассмотренный пример показывает, что если в процессе решения уравнения могут быть приобретены посторонние корни, то их можно выявить проверкой.

Пример 2. Решите уравнение $x^2 = 2x$.

Решение. $x^2 - 2x = 0$, $x(x-2) = 0$.

Ответ: 0; 2.

Если бы мы разделили обе части данного уравнения на x, то получили бы один корень $x = 2$. Однако деление на x обеих частей уравнения нарушает его равносильность, мы в этом случае теряем корень $x = 0$. Выполнять над уравнением преобразования, приводящие к потере корней, нельзя.

Из рассмотренных примеров можно сделать вывод: в процессе решений уравнений над ними можно выполнять только такие преобразования, которые не нарушают равносильности или нарушают ее, приводя к приобретению посторонних корней. В последнем случае посторонние корни должны быть выявлены (путем проверки) и отброшены. Выполнение преобразований, приводящих к потере корней, недопустимо. Решая, например, уравнение вида $f(x)\cdot g(x)=\varphi(x)\cdot g(x)$ (1), мы не имеем права делить обе его части на $g(x)$, так как такое преобразование может привести к потере корней. Необходимо перенести все члены уравнения в одну его часть: $f(x)g(x)-\varphi(x)\cdot g(x)=0$ (2), разложить левую часть уравнения на множители $g(x)(f(x)-\varphi(x))=0$ (3), приравнять каждый из множителей нулю. Получим совокупность уравнений $\left[\begin{array}{l} g(x)=0,\\ f(x)-\varphi(x)=0\end{array}\right.$ (4). Решаем каждое из них. Множество корней данного уравнения есть объединение корней каждого из уравнений совокупности (4).

Поясним теперь на примере, в каком случае могут быть приобретены посторонние корни уравнения $f(x)=g(x)$. Введем новое понятие: областью допустимых значений переменной (сокращенно ОДЗ) уравнения $f(x)=g(x)$ будем называть пересечение (общую часть) областей определения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Пример 3. Решите уравнение $\sqrt{x}=6-x$. (1)

Решение. Обозначим $f(x)=\sqrt{x}$, $\varphi(x)=6-x$. $D(f)=[0;\infty[$, $D(\varphi)=]-\infty;\infty[$, ОДЗ: $[0;\infty[\cap]-\infty;\infty[=[0;\infty[$. Решим теперь приведенное уравнение. Возведем обе его части в квадрат, получим: $x=36-12x+x^2$ (2). Замечаем, что ОДЗ уравнения (2) шире ОДЗ исходного уравнения. ОДЗ уравнения (2) — множество всех действительных чисел. Преобразование, в результате которого ОДЗ полученного уравнения шире ОДЗ исходного уравнения, может привести к приобретению посторонних корней. Выполнение такой операции допустимо, однако необходимо проверить корни. Продолжим решение данного уравнения:

$$x^2-13x+36=0,\quad x=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{2},\quad x=\frac{13\pm5}{2},$$
$$x=9 \text{ или } x=4.$$

Проверка: 1) $\sqrt{9}\neq6-9$; $x=9$ — посторонний корень. 2) $\sqrt{4}=6-4$.

Ответ: 4.

Сформулируем теперь без доказательства некоторые важные приемы решения уравнений.

1. Перенос слагаемого из одной части уравнения в другую всегда приводит к уравнению, равносильному данному.

2. Прибавление к обеим частям уравнения $f(x)=\varphi(x)$ выражения $g(x)$ приводит к уравнению $f(x)+g(x)=\varphi(x)+g(x)$, равносильному данному, если область определения выражения $g(x)$ содержит в себе ОДЗ данного уравнения.

3. Приведение подобных членов может привести либо к уравнению, равносильному данному, либо к уравнению, содержащему посторонние корни.

Пример 4. Решите уравнение $2x+x^2=3x-1+x^2$.

Решение. $2x+x^2-3x-x^2=-1$, $-x=-1$, $x=1$. Приведение подобных членов x^2 и $-x^2$ привело к уравнению, равносильному данному.

Ответ: 1.

Пример 5. Решите уравнение $2x+\sqrt{x}=3x+1+\sqrt{x}$.

Решение. $2x+\sqrt{x}-3x-\sqrt{x}=1$, $-x=1$, $x=-1$. Приведение подобных членов $\sqrt{x}$ и $-\sqrt{x}$ привело к уравнению, ОДЗ которого шире ОДЗ исходного уравнения. ОДЗ исходного уравнения — промежуток $[0;\infty[$, а ОДЗ уравнения, полученного после приведения подобных членов,— множество всех действительных чисел. В этом случае возможно приобретение посторонних корней. Проверка исходного уравнения является органической частью решения.

Проверка: $2\cdot(-1)+\sqrt{-1}$ — не имеет смысла на множестве действительных чисел. Число -1 — посторонний корень. Данное уравнение решений не имеет.

4. Умножение обеих частей уравнения на выражение, область определения которого содержит ОДЗ данного уравнения, приводит либо к уравнению, равносильному данному, либо к уравнению, содержащему посторонние корни.

Пример 6. Решите уравнение $\frac{2-2x}{x-1}=x+3$.

Решение. Умножим обе части уравнения на выражение $x-1$. Область определения этого выражения — множество действительных чисел — содержит ОДЗ данного уравнения ($x\neq1$). Поэтому это преобразование не может привести к потере корней, а может привести лишь к приобретению посторонних корней. Получим:

$$2-2x=(x+3)(x-1),\ -2(x-1)=(x+3)(x-1),$$
$$(x-1)(x+3+2)=0,\ (x-1)(x+5)=0,$$
$$x=1 \text{ или } x=-5.$$

Проверка: 1) $x=1$ — посторонний корень, так как при $x=1$ выражение $\frac{2-2x}{x-1}$ теряет смысл.

2) $\frac{2-2\cdot(-5)}{-5-1}=-2$, $-5+3=-2$, $x=-5$ — корень данного уравнения.

Ответ: -5.

Умножение обеих частей уравнения на выражение, содержащее переменную, может привести и к потере корней, если область определения этого выражения не содержит ОДЗ данного уравнения. Выполнение такого преобразования недопустимо. Например, обе части уравнения $2(x-1)=x(x-1)$ нельзя умножить на выражение $\frac{1}{x-1}$, так как область определения выражения $\frac{1}{x-1}$ — множество действительных чисел, отличных от единицы, не содержит ОДЗ данного уравнения — множества всех действительных чисел. Применение этого преобразования в нашем примере привело бы к потере корня $x=1$.

5. Возведение обеих частей уравнения в одну и ту же натуральную степень может привести либо к уравнению, равносильному данному, либо к уравнению, содержащему посторонние корни.

Переход от уравнения $f(x)=\varphi(x)$ (1) к уравнению $(f(x))^n=(\varphi(x))^n$ (2), где n — натуральное число, допустимо, но применение такого преобразования может привести к приобретению посторонних корней, поэтому проверка обязательна. Возведение обеих частей уравнения в натуральную степень часто применяется при решении иррациональных уравнений.

6. Переход от уравнения $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)=0$ (1) к совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x)=0,\\ f_2(x)=0, \quad (2)\\ \ldots\ldots\\ f_n(x)=0\end{array}\right.$$

допустим: 1) множество корней совокупности (2) совпадает с множеством корней уравнения (1), если все эти корни принадлежат ОДЗ данного уравнения; 2) множество корней данного уравнения есть подмножество корней совокупности (2), если некоторые из корней совокупности не принадлежат ОДЗ данного уравнения. Поэтому переход от уравнения (1) к совокупности (2) уравнений не может привести к потере корней.

Пример 7. Решите уравнение $(x^2-4)\cdot\sqrt{x-1}=0$.

Решение. ОДЗ данного уравнения: $x\geqslant 1$.

$$\left[\begin{array}{l} x^2-4=0,\\ \sqrt{x-1}=0;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x_1=2,\\ x_2=-2,\\ x_3=1.\end{array}\right.$$

Заметим, что корень $x_2=-2$ не принадлежит ОДЗ данного уравнения.

Ответ: 1; 2.

Пример 8. Решите уравнение

$$2^x\cdot(x-1)\sqrt{(2-x)(x+4)(x-5)}\cdot\log_2(x-3)=0.$$

Решение. Перейдем от данного уравнения к совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x=0,\\ x-1=0,\\ \sqrt{(2-x)(x+4)(x-5)}=0,\\ \log_2(x-3)=0.\end{array}\right.$$

Как было сказано выше, такой переход допустим, он не приводит к потере корней. Теперь решаем каждое уравнение данной совокупности отдельно, находим объединение этих решений и с помощью проверки отбрасываем посторонние корни, которые могут быть приобретены в процессе решения уравнений.

Уравнение $2^x=0$ корней не имеет, так как $2^x>0$ при $x\in\mathbf{R}$.

$$x-1=0,\ x_1=1;$$

$$\sqrt{(2-x)(x+4)(x-5)}=0,\ (2-x)(x+4)(x-5)=0,$$

$$x_2=2,\ x_3=-4,\ x_4=5;$$

$\log_2(x-3)=0,\ x-3=1,\ x_5=4.$

Проверка: 1) $x_1=1$; $2^1\cdot(1-1)\cdot\sqrt{(2-1)(1+4)(1-5)}\times\log_2(1-3)$ не имеет смысла по одной из двух причин: во-первых, логарифм отрицательного числа не существует, во-вторых, квадратный корень из отрицательного числа также не существует, следовательно, $x=1$ — корень посторонний.

2) $x_2=2$; $2^2(2-1)\sqrt{(2-2)(2+4)(2-5)}\cdot\log_2(2-3)$ не имеет смысла, так как $\log_2(-1)$ не существует.

3) $x_3=-4$; $2^{-4}\cdot(-4-1)\cdot\sqrt{(2-(-4))(-4+4)(-4-5)}\times\log_2(-4-3)$ не имеет смысла, так как $\log_2(-7)$ не существует.

4) $x_4=5$; $2^5\cdot(5-1)\sqrt{(2-5)(5+4)(5-5)}\cdot\log_2(5-2)=0$, $x=5$ — корень данного уравнения.

5) $x_5=4$; $2^4\cdot(4-1)\cdot\sqrt{(2-4)(4+4)(4-5)}\cdot\log_2(4-3)=0$, $x=4$ — корень данного уравнения.

Ответ: 4; 5.

Мы рассмотрели без доказательств некоторые правила преобразования уравнений и проиллюстрировали их на примерах. Еще раз подчеркнем, что недопустимы такие преобразования уравнений, которые приводят к потере его корней. Наиболее распространенной ошибкой, приводящей к потере корней, является деление обеих частей уравнения на выражение, содержащее переменную.

Упражнения

1. Сформулируйте определение уравнения. Что значит решить уравнение?

2. Какие уравнения называют равносильными?

3. Расскажите о правилах преобразований уравнений. Какие из них допустимы?

4. В каких случаях при решении уравнений возможно появление посторонних корней? Приведите примеры.

5. В каких случаях при решении уравнений возможна потеря корней? Приведите примеры.

6. Всегда ли при решении уравнений обязательна проверка его корней?

7. Равносильны ли уравнения:

а) $\lg x+\lg(x-1)=\lg 2$ и $\lg x(x-1)=\lg 2$;

б) $x+\lg x-5=2x-\lg x$ и $x-5=2x-2\lg x$?

8. Решите уравнения:

а) $(x-2)(x+1)^2(x^2+2)=0$; б) $\frac{1}{(x-5)^2}=\frac{1}{x-5}$;

в) $\frac{x^2-16}{x+4}=0$; г) $(x+4)^2=3(x+4)$;

д) $\frac{x^2-2x+3}{x-1}+\frac{x-3}{x-1}=-4$; е) $\lg x^2=2$;

ж) $(x-2)\sqrt{(x+1)(3-x)}\lg(x-5)=0$.

9. Покажите на примере, что приведение подобных членов не всегда приводит к уравнению, равносильному данному.

10*. Докажите, что уравнения $f(x)=\varphi(x)+g(x)$ и $f(x)-g(x)=\varphi(x)$ равносильны.

11*. Докажите, что если каждая из функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ определена на области допустимых значений уравнения $f(x)\cdot\varphi(x)=0$, то это уравнение равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ \varphi(x)=0 \end{array}\right.$ на рассматриваемом множестве.

12*. Найдите условие, при котором уравнения $f(x)=\varphi(x)$ и $f^2(x)=\varphi^2(x)$ равносильны.

§ 103. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Уравнение, содержащее переменную под знаком радикала, называют иррациональным. Например, уравнения $\sqrt{2x-3}=1$, $\sqrt{x}+4=x$, $x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{2}}+8=0$ являются иррациональными.

Мы будем рассматривать иррациональные уравнения на множестве действительных чисел. Решение иррационального уравнения основано на сведении его с помощью некоторых преобразований к рациональному уравнению. Обычно это достигается возведением обеих частей иррационального уравнения в одну и ту же степень. Такое преобразование иногда приходится применять несколько раз.

Известно, что при возведении обеих частей уравнения в одну и ту же степень могут появиться посторонние корни, поэтому проверка полученных корней обязательна, она является органической частью решения.

При решении иррационального уравнения необходимо также иметь в виду, что радикалы с четными показателями и их подкоренные выражения неотрицательны; подкоренное

выражение радикала с нечетным показателем может быть любым действительным числом, знак радикала при этом совпадает со знаком подкоренного выражения.

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt{5x}=-2$.

Решение. Уравнение $\sqrt{5x}=-2$ не имеет решения, так как радикал с четным показателем не отрицателен.

Пример 2. Решите уравнение $1+\sqrt{x+5}=0$.

Решение. Уравнение $1+\sqrt{x+5}=0$ не имеет решения, так как $\sqrt{x+5}\neq-1$.

Пример 3. Решите уравнение $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-4}=-4$.

Решение. Ни один из радикалов, входящих в данное уравнение, не может быть отрицательным числом, поэтому ни при каких действительных значениях переменной x сумма этих радикалов не может равняться -4. Следовательно, данное уравнение решений не имеет.

Пример 4. Решите уравнение $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-10}=2$.

Решение. Допустимые значения переменной должны удовлетворять системе неравенств:

$$\left\{\begin{array}{l} 3-x\geqslant 0, \\ x-10\geqslant 0, \end{array}\right. \quad \text{откуда} \quad \left\{\begin{array}{l} x\leqslant 3, \\ x\geqslant 10. \end{array}\right.$$

Последняя система несовместна, поэтому данное уравнение решений не имеет.

Пример 5. Решите уравнение $\sqrt{x-2}=2-x$.

Решение. $\left\{\begin{array}{l} x-2\geqslant 0, \\ 2-x\geqslant 0; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x\geqslant 2, \\ x\leqslant 2; \end{array}\right. \quad x=2.$

Ответ: 2.

Пример 6. Решите уравнение $\sqrt[3]{2x-1}=3$.

Решение. $\sqrt[3]{2x-1}=3$, $(\sqrt[3]{2x-1})^3=3^3$, $2x-1=27$, $x=14$.

Проверка: $\sqrt[3]{2\cdot 14-1}=3$.

Ответ: 14.

Пример 7. Решите уравнение $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+3}=1$.

Решение. $\sqrt{2x+3}=1-\sqrt{3x+3}$,

$$(\sqrt{2x+3})^2=(1-\sqrt{3x+3})^2,$$
$$2x+3=1-2\sqrt{3x+3}+3x+3,$$
$$2\sqrt{3x+3}=x+1,$$
$$(2\sqrt{3x+3})^2=(x+1)^2,$$
$$4(3x+3)=x^2+2x+1,$$
$$x^2-10x-11=0,\ x_1=11,\ x_2=-1.$$

Проверка: 1) $\sqrt{2\cdot 11+3}+\sqrt{3\cdot 11+3}=\sqrt{25}+\sqrt{36}=5+6=11\neq 1$.

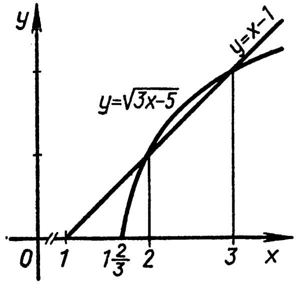


Рис. 272

2) $\sqrt{2\cdot(-1)+3}+\sqrt{3\cdot(-1)+3}=$ $=\sqrt{1}+\sqrt{0}=1.$

Ответ: -1.

Пример 8. Решите уравнение $\sqrt{2x-6}=5-\sqrt{x+4}$.

Решение. Обе части данного уравнения возведем в квадрат. Получим: $2x-6=25-10\sqrt{x+4}+x+4$, или после уединения радикала: $-10\sqrt{x+4}=$ $=x-35$. Вновь возведем в квадрат обе части полученного уравнения:

$$100(x+4)=(x-35)^2,\ 100x+400=x^2-70x+1225,$$
$$x^2-170x+825=0,$$

откуда $x=5$ или $x=165$.

Проверка: 1) $\sqrt{2\cdot5-6}=\sqrt{4}=2,\ 5-\sqrt{5+4}=5-3=2.$

2) $\sqrt{2\cdot165-6}\neq5-\sqrt{165+4}.$

Ответ: 5.

Пример 9. Решите графически уравнение $x-1=\sqrt{3x-5}$.

Решение. В одной и той же системе координат строим графики функций $y=x-1$ и $y=\sqrt{3x-5}$ (рис. 272) и определяем абсциссы точек их пересечения: $x_1\approx2$ и $x_2\approx3$. Заметим, что эти решения являются точными.

Ответ: 2; 3.

Упражнения

1. Какое уравнение называется иррациональным? Приведите примеры иррациональных уравнений.

2. Найдите область допустимых значений переменной иррациональных уравнений:

а) $\sqrt{2x+5}=3$; б) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{5x-3}=4$;

в) $\sqrt[3]{x+5}-\sqrt{2x-5}=0$; г) $\sqrt{7-5x}+\sqrt{x+3}=4$;

д) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+5}+1=0$.

3. Расскажите план решения иррационального уравнения.

4. Объясните устно, почему приведенные ниже уравнения не имеют решений:

а) $\sqrt{x}=-3$; б) $\sqrt{x+1}=-2$;

в) $\sqrt{3x+6}+2=1$; г) $\sqrt{5x-2}+\sqrt{x+3}=0$;

д) $\sqrt{7+\sqrt{5x+3}}=2$; е) $\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}=7$;

ж) $\sqrt{x-9}-\sqrt{6-x}=2$.

5. Решите уравнения:

а) $\sqrt{6-x}=x$; б) $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{5}$;

в) $\sqrt{x+3}=x-3$; г) $3+\sqrt{2x+1}=1$;

д) $\sqrt[4]{5x+4}-3\sqrt[4]{x}=0$; е) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}=x$;

ж) $(x-3)^{\frac{1}{3}}=(2x-1)^{\frac{1}{3}}$; з) $\sqrt[3]{x^3-2x-3}=x-1$;

и) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x+6}=x+3$; к) $\sqrt{4x-3}=\frac{3x-1}{\sqrt{3x-5}}$;

л) $\sqrt{3-x}+\frac{6}{\sqrt{3-x}}=\sqrt{9-5x}$;

м) $5\sqrt{2x+3}-\sqrt{18x-5}=\frac{4(x+3)}{\sqrt{2x+3}}$.

6. Решите уравнения:

а) $\sqrt{1+x\sqrt{2x^2-8}}-1=0$; б) $x=1-\sqrt{1-x\sqrt{2x^2-17}}$;

в) $\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\sqrt{1-\frac{1}{x}\sqrt{64-\frac{7}{x^2}}}$; г) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+5}=6$;

д) $\sqrt{x-3}-\sqrt{x-6}=1$; е) $\sqrt{x+7}+\sqrt{3x-2}-9=0$;

ж) $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$; з) $\sqrt{25-x}+\sqrt{9+x}=2$;

и) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x+1}$;

к) $\sqrt{5x+7}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+3}$.

7. Решите уравнение методом введения новой переменной:

а) $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-4}=\frac{\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}-7}$; б) $\sqrt{x-3}+6=5\sqrt[4]{x-3}$;

в) $x^2-x+9+\sqrt{x^2-x+9}=12$; г) $2\sqrt{x-1}-5=\frac{3}{\sqrt{x-1}}$;

д) $10\sqrt{x^2-x-1}+\frac{3}{\sqrt{x^2-x-1}}=13$;

е) $x^2+2\sqrt{x^2-3x+11}=3x+4$; ж) $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6$;

з) $\sqrt{\frac{2-x}{x+3}}+\sqrt{\frac{x+3}{2-x}}=\frac{5}{2}$; и)* $\sqrt{x^3+x^2-1}+\sqrt{x^3+x^2+2}=3$.

8. Решите графически уравнения:

а) $\sqrt{x}=x$; б) $\sqrt{x}=x+1$;

в) $\sqrt{x}=2x^2-1$; г)* $\sqrt{3x-5}=x^2-7$.

§ 104. УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ И ТРЕМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Уравнением с двумя переменными называют уравнение вида $f(x, y)=\varphi(x, y)$, где f и φ — некоторые функции переменных x и y. Например, $x-1=2x+y$, $x^2+y^2=4$, $2xy-x=y$ — уравнения с двумя переменными.

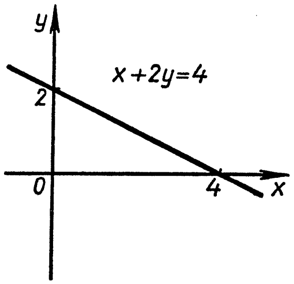


Рис. 273

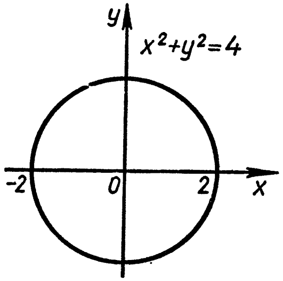


Рис. 274

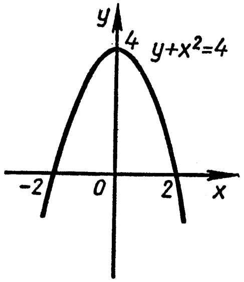


Рис. 275

Упорядоченную пару чисел (x_0; y_0) называют решением уравнения $f(x;\ y)=\varphi(x;\ y)$, если при подстановке их соответственно вместо переменных x и y уравнение обращается в верное числовое равенство $f(x_0;\ y_0)=\varphi(x_0;\ y_0)$. Например, пара (2; 1) — решение уравнения $2x-3=y$, так как $2\cdot2-3=1$ — верное числовое равенство; пара (0; —1) — решение уравнения $2^{x-y}=x-2y$, так как $2^{0-(-1)}=0-2\cdot(-1)$ — верное числовое равенство.

Уравнение с двумя переменными в общем случае имеет бесконечное множество решений, так как, давая одной из переменных произвольное (допустимое) значение, из уравнения можно найти соответствующее ему значение второй переменной.

Решить уравнение с двумя переменными — значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Геометрически решения уравнения с двумя переменными изображаются точками плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению; множество всех этих точек называют графиком уравнения.

На рисунках 273—275 изображены соответственно графики уравнений $x+2y=4$, $x^2+y^2=4$, $y+x^2=4$.

Уравнением с тремя переменными называют равенство вида $f(x;\ y;\ z)=\varphi(x;\ y;\ z)$, где f и φ — некоторые функции переменных x, y и z.

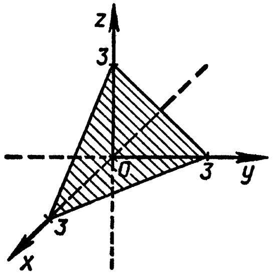


Рис. 276

Например, $2x-3y+z=5$, $x^2+y^2+z^2=4$ — уравнения с тремя переменными.

Упорядоченная тройка чисел (x_0; y_0; z_0) называется решением уравнения с тремя переменными, если при подстановке их соответственно вместо переменных x, y, z уравнение обращается в верное числовое равенство.

Уравнение с тремя переменными в общем случае имеет бесконечное множество решений, так как, давая переменным x и y произвольные (допустимые) значения, из уравнения можно найти соответствующие им значения третьей переменной.

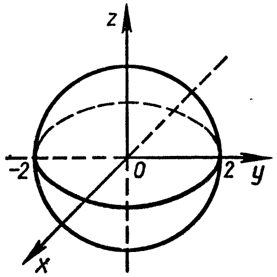


Рис. 277

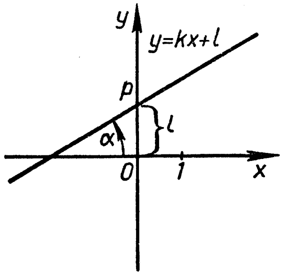


Рис. 278

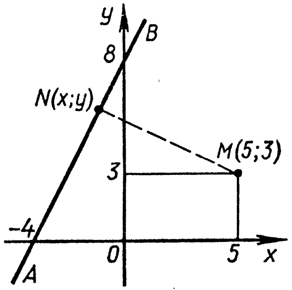


Рис. 279

Геометрически решения уравнения с тремя переменными изображаются точками трехмерного пространства, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. На рисунках 276 и 277 изображены соответственно решения уравнений $x+y+z=3$, где $x\geqslant0$, $y\geqslant0$, $z\geqslant0$ (треугольник), и $x^2+y^2+z^2=4$ (сфера).

Напомним, что график функции $y=kx+l$ есть прямая линия. Эта прямая проходит через точку (0; l) (рис. 278). Число k называют угловым коэффициентом этой прямой: $k=\operatorname{tg}\alpha$. Этот коэффициент определяет угол α между прямой и положительным направлением оси абсцисс. Число l определяет точку пересечения прямой с осью ординат; назовем число l ординатой в начале.

Задача. Найдите расстояние от точки M (5; 3) до прямой AB, заданной уравнением $2x-y+8=0$.

Решение. Пусть точка $N(x;\ y)$ принадлежит данной прямой (рис. 279). Так как $N\in(AB)$, то ордината y точки N выражается через ее абсциссу следующим образом: $y=2x+8$.

Найдем квадрат расстояния $|MN|$ по известной формуле расстояния между двумя точками, заданными своими координатами:

$$|MN|^2=(x-5)^2+(y-3)^2=(x-5)^2+(2x+8-3)^2=$$
$$=x^2-10x+25+4x^2+20x+25=5x^2+10x+50.$$

Обозначим $5x^2+10x+50=f(x)$. Квадрат расстояния от точки M до прямой AB есть минимум квадратичной функции $f(x)$. Найдем экстремум этой функции:

$$f'(x)=10x+10,\ 10x+10=0,\ x=-1.$$

Точка $x=-1$ — точка минимума, так как график функции $f(x)$ — парабола, ветви которой направлены вверх.

$$\min|MN|^2=5\cdot(-1)^2+10(-1)+50=45,$$
$$|MN|=\sqrt{45}=3\sqrt{5}.$$

Ответ: $3\sqrt{5}$.

Упражнения

1. Найдите по три решения каждого из следующих уравнений и постройте их графики: а) $x + 2y = 0$; б) $2x - 3y - 6 = 0$.

2. Найдите угол наклона соответствующей прямой к положительной полуоси абсцисс: а) $x - y = 5$; б) $2x + 2y = 3$; в) $y = \sqrt{3}\, x - 1$.

3. Составьте уравнение прямой, если дан угол наклона ее к положительной полуоси абсцисс и координата в начале:
а) $\alpha = 45°$, $l = 1$; б) $\alpha = 30°$, $l = -2$; в) $\alpha = 135°$, $l = -3$.

4. При каком значении коэффициента a график уравнения $ax + y = 0$ образует с положительной полуосью абсцисс угол 60°?

5. При каких значениях коэффициентов a и b график уравнения $ax + by = 0$ служит объединением биссектрисс: а) первого и третьего координатных углов; б) второго и четвертого координатных углов?

6. Составьте уравнение множества точек, каждая из которых находится от оси абсцисс на расстоянии 3.

7. Постройте множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям: а) $2x + y = 0$, $x \leqslant 0$; б) $3x - 4y = 0$, $3 \leqslant y \leqslant 10$.

8. Найдите какое-нибудь уравнение с двумя переменными, имеющее единственное решение $(0;\ 0)$.

9. Изобразите графически множества решений уравнений:
а) $y - x^2 = 2$; б) $\sin x - 2y = 0$;
в) $x^2 + y^2 = 16$; г) $xy = 2$;
д) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$; е) $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

10. Даны две точки A и B, расстояние между которыми равно 8. Составьте уравнение множества точек плоскости, для каждой из которых расстояние от точки A относится к расстоянию от точки B как 3 : 1. Постройте это множество точек.

11. Найдите расстояние от начала координат до прямой $3x - y + 6 = 0$.

§ 105. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

С системами уравнений вы уже встречались. Например, система двух уравнений с двумя переменными имеет вид:

$$\begin{cases} f(x;\ y) = \varphi(x;\ y), \\ \psi(x;\ y) = g(x;\ y). \end{cases}$$

Решением системы называют пару чисел $(x_0;\ y_0)$, при подстановке которых соответственно вместо переменных x и y в каждое уравнение системы получаются верные числовые равенства:

$$f(x_0;\ y_0) = \varphi(x_0;\ y_0);\ \psi(x_0;\ y_0) = g(x_0;\ y_0).$$

Решить систему уравнений — это значит найти все ее решения или доказать, что их нет. Обращаем внимание на тот факт, что фигурная скобка, объединяющая уравнения в систему, означает, что решением системы является пересечение (общая часть) решений каждого из составляющих ее уравнений. Другими словами, решая систему уравнений, мы ищем такие пары чисел $(x_0;\ y_0)$, которые при подстановке их соответственно вместо переменных x и y обращают в верное числовое равенство каждое из уравнений системы. Систему, не имеющую решений, называют несовместной.

Две системы уравнений называют равносильными, если множества их решений (множества пар) совпадают.

Множество решений системы уравнений, как и одного уравнения, зависит от того, на каком числовом множестве она рассматривается.

Решение систем уравнений основано на том, что если в системе любое из уравнений заменить равносильным ему уравнением, то получается система, равносильная данной.

В данном параграфе мы рассмотрим решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными.

Система двух линейных уравнений с двумя переменными имеет вид:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

где x, y — переменные, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — некоторые числа.

Если одно уравнение системы имеет вид $0 \cdot x + 0 \cdot y = c$, то при $c = 0$ любая пара чисел $(x;\ y)$ служит решением этого уравнения; в этом случае это уравнение не накладывает никаких ограничений на решение системы и может быть отброшено. Если же $c \neq 0$, то уравнение $0 \cdot x + 0 \cdot y = c$ не имеет решений и в этом случае система несовместна.

Таким образом, интерес представляет изучение системы, в каждом уравнении которой хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля, т. е. когда каждое уравнение первой степени.

Напомним, что графиком одного уравнения $ax + by = c$ с двумя переменными является прямая, если по крайней мере один из коэффициентов a или b отличен от нуля.

Задание 1. Как расположен график прямой $ax + by = c$, если $a = 0$, $b \neq 0$? Приведите примеры.

Задание 2. Как расположен график прямой $ax + by = c$, если $a \neq 0$, $b = 0$? Приведите примеры.

Задание 3. Как расположен график прямой $ax + by = c$, если $a \neq 0$ и $b \neq 0$? Приведите примеры.

Мы договорились рассматривать такую систему (I), в каждом уравнении которой хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля. Поэтому возможны лишь три существенно различных случая:

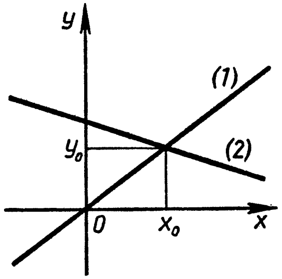


Рис. 280

I. Оба коэффициента при переменной y не нули: $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$.

II. Только один из коэффициентов при переменной y равен нулю, например $b_2 = 0$, тогда $a_2 \neq 0$.

III. Оба коэффициента при переменной y — нули, тогда оба коэффициента при переменной x не нули.

Рассмотрим каждый из случаев отдельно.

I. Оба коэффициента при переменной y не нули: $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$. В этом случае каждое уравнение системы (I) можно разрешить относительно y, получим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1} & (1), \\ y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2} & (2), \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

где $-\frac{a_1}{b_1}$ и $-\frac{a_2}{b_2}$ — угловые коэффициенты соответствующих прямых, а $\frac{c_1}{b_1}$ и $\frac{c_2}{b_2}$ — их соответствующие ординаты в начале.

В зависимости от значений угловых коэффициентов и ординат в начале возможны следующие случаи расположения прямых:

а) Прямые (1) и (2) пересекаются, что имеет место, если их угловые коэффициенты различны:

$$-\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2}, \text{ или } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

В этом случае система имеет единственное решение, которым служат координаты x_0 и y_0 точки пересечения прямых (1) и (2) (рис. 280). Найдем это решение.

Решим систему (I) методом алгебраического сложения: вначале умножим первое уравнение системы на b_2, второе на $-b_1$ и сложим почленно эти уравнения, исключив, таким образом, переменную y:

$$\left\{\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}\right. \left|\begin{aligned} &b_2 \\ &-b_1, \end{aligned}\right. \quad + \left\{\begin{aligned} a_1b_2x + b_1b_2y &= c_1b_2, \\ -a_2b_1x - b_1b_2y &= -b_1c_2 \end{aligned}\right.$$
$$\overline{x(a_1b_2 - a_2b_1) = c_1b_2 - b_1c_2}.$$

Так как $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$,

$$x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Теперь исключим переменную x. Для этого умножим первое уравнение системы (I) на a_2, второе на $-a_1$ и оба уравнения сложим почленно:

$$+\left\{\begin{aligned} a_1a_2x + a_2b_1y &= a_2c_1, \\ -a_1a_2x - a_1b_2y &= -a_1c_2 \end{aligned}\right.$$
$$\overline{y(a_2b_1 - a_1b_2) = a_2c_1 - a_1c_2}.$$

Так как $a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0$,

$$y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Для удобства решения системы (I) введем обозначения: выражение $a_1b_2 - a_2b_1$ обозначим символом Δ; его называют главным определителем системы. Главный определитель системы можно условно записать в виде таблицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Эту таблицу раскрыть довольно просто: надо от произведения верхнего числа в первой колонке и нижнего числа во второй колонке отнять произведение нижнего числа в первой колонке и верхнего во второй. Это схематически можно изобразить так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Задание 4. Вычислите значение определителя $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$.

Выражения, стоящие в числителях найденных значений x и y, называют вспомогательными определителями системы, их условно обозначают так:

$$\Delta_x = c_1b_2 - b_1c_2 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_y = a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Как можно заметить, правило раскрытия таблиц такое же. Нетрудно запомнить правило составления определителей. Главный определитель системы представляет собой таблицу, составленную из коэффициентов при переменных x и y. Вспомогательные же определители могут быть получены из главного заменой соответствующей колонки коэффициентов колонкой свободных членов c_1 и c_2.

Теперь решение системы (I) можно записать с помощью определителей:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Приведенные формулы называют формулами Крамера.

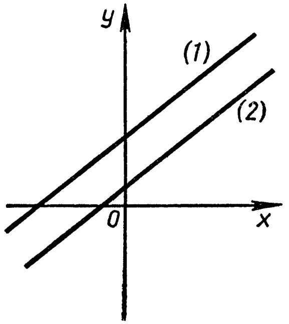


Рис. 281

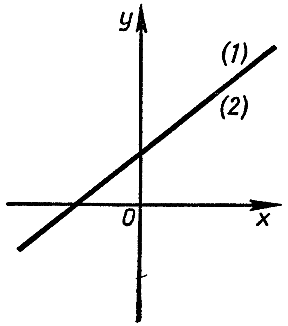


Рис. 282

Таким образом, система (I) имеет единственное решение, если $\Delta \neq 0$.

Задание 5. Решите с помощью определителей систему $\begin{cases} 5x - y = 8, \\ 2x + 3y = -7. \end{cases}$

б) Прямые (1) и (2) параллельны и не совпадают, что имеет место, если угловые коэффициенты равны между собой, а ординаты в начале различны: $-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$, откуда $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, или $\Delta = 0$; $\frac{c_1}{b_1} \neq \frac{c_2}{b_2}$, откуда $c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0$, или $\Delta_x \neq 0$. В этом случае система (I) решений не имеет (рис. 281).

Таким образом, система (I) не имеет решений, если $\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0$. При этом Δ_y может быть отличен от нуля либо равен нулю.

в) Прямые (1) и (2) совпадают, что имеет место, если их угловые коэффициенты равны между собой и ординаты в начале равны между собой: $-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$, откуда $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, или $\Delta = 0$; $\frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2}$, откуда $c_1b_2 - c_2b_1 = 0$, или $\Delta_x = 0$. В этом случае система (I) имеет бесконечное множество решений; координаты любой точки, принадлежащей совпавшим прямым (1) и (2), будут решениями данной системы (рис. 282). Заметим, что в этом случае и $\Delta_y = 0$. В самом деле, из условия $\frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2}$ находим: $c_1 = \frac{c_2b_1}{b_2}$, следовательно, $\Delta_y = a_1c_2 - a_2c_1 =$
$= a_1c_2 - a_2 \cdot \frac{c_2b_1}{b_2} = \frac{c_2(a_1b_2 - a_2b_1)}{b_2} = \frac{c_2 \cdot 0}{b_2} = 0$.

Таким образом, система (I) имеет бесконечное множество решений, если $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$. Заранее отметим, что рассмотрение случаев II и III не дает никаких новых результатов.

Результаты наших исследований можно свести в таблицу:

$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$, $\Delta x \neq 0$ или $\Delta = 0$, $\Delta y \neq 0$	$\Delta = 0$, $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$
Система (I) имеет единственное решение: $x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}$; $y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}$	Система (I) не имеет решений	Система (I) имеет бесконечное множество решений

Пример 1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -5, \\ 3x + y = 9. \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 \cdot (-3) = 11 \neq 0.$$

Система имеет единственное решение:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 9 & 1 \end{vmatrix}}{11} = \frac{-5 + 27}{11} = \frac{22}{11} = 2;$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}}{11} = \frac{18 + 15}{11} = \frac{33}{11} = 3.$$

Ответ: (2; 3).

Пример 2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + ay = -6, \\ ax + 8y = 12. \end{cases}$$

Решение. Данная система содержит параметр a, поэтому ее решение будет зависеть от значений этого параметра. Найдем Δ, Δ_x, Δ_y:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & a \\ a & 8 \end{vmatrix} = 16 - a^2, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -6 & a \\ 12 & 8 \end{vmatrix} = -48 - 12a,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ a & 12 \end{vmatrix} = 24 + 6a.$$

1. Если $\Delta \neq 0$, т. е. $16 - a^2 \neq 0$, $a \neq 4$ или $a \neq -4$, то данная система имеет единственное решение:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-48 - 12a}{16 - a^2} = \frac{12}{a - 4},$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{24 + 6a}{16 - a^2} = \frac{6}{4 - a}.$$

2. Если $a = 4$, то $\Delta = 0$, $\Delta_x = -48 - 48 \neq 0$, и, следовательно, данная система решений не имеет.

3. Если $a=-4$, то $\Delta=0$, $\Delta_y=0$, и, следовательно, данная система имеет бесконечное множество решений, удовлетворяющих уравнению $2x-4y=-6$. Из этого уравнения $y=\frac{x+3}{2}$, где x — любое число.

▶ Продолжим исследование системы (I).

II. Пусть $b_2=0$, $a_2\neq 0$, $b_1\neq 0$. Тогда система (I) принимает вид:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+0\cdot y=c_2,\end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} y=-\frac{a_1}{b_1}x+\frac{c_1}{b_1},\\ x=\frac{c_2}{a_2}.\end{cases}$$

График первого уравнения есть прямая, не параллельная оси ординат, а график второго уравнения — прямая, параллельная оси ординат. Поэтому прямые пересекаются, и данная система имеет единственное решение. Заметим, что в этом случае $\Delta\neq 0$. Действительно, $\Delta=a_1\cdot 0-a_2b_1=-a_2b_1\neq 0$.

III. Пусть $b_1=0$, $b_2=0$, $a_1\neq 0$, $a_2\neq 0$. Система (I) в этом случае принимает вид:

$$\begin{cases} a_1x=c_1,\\ a_2x=c_2,\end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x=\frac{c_1}{a_1},\\ x=\frac{c_2}{a_2}.\end{cases}$$

Получим уравнения двух параллельных прямых. При этом, если:

а) $\frac{c_1}{a_1}\neq\frac{c_2}{a_2}$, т. е. $a_1c_2-a_2c_1\neq 0$ или $\Delta_y\neq 0$, то прямые различны и данная система решений не имеет. Заметим, что в этом случае $\Delta=0$;

б) $\frac{c_1}{a_1}=\frac{c_2}{a_2}$, т. е. $a_1c_2-a_2c_1=0$ или $\Delta_y=0$, то прямые совпадают и система имеет бесконечное множество решений. Заметим, что в этом случае $\Delta=0$ и $\Delta_x=0$. ◀

Упражнения

1. Составьте конспект исследования системы двух линейных уравнений с двумя переменными.

2. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3x+5y+9=0,\\ 2x-y-7=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases} 9x+8y-21=0,\\ 6x+4y-13=0;\end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x+4y-29=0,\\ 9x-2y-17=0.\end{cases}$

3. Решите системы уравнений и геометрически проиллюстрируйте решения:

а) $\begin{cases} 3x-y=7,\\ x+2y=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-y=7,\\ 6x-2y=5;\end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x-y=7,\\ 4{,}5x-1{,}5y=10{,}5.\end{cases}$

4. Установите, имеет ли система уравнений:

а) $\begin{cases} x+2y=-2,\\ -0{,}5x-y=4;\end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y=3,\\ -4x+2y=-6;\end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x-y=0{,}5,\\ -10x+2y=-1;\end{cases}$ г) $\begin{cases} x-5y=18,\\ x+y=0;\end{cases}$

д) $\begin{cases} x-3y=2,\\ 6x-12y=3;\end{cases}$ е) $\begin{cases} x+y=1,\\ 2x-3y=2\end{cases}$

единственное решение; пустое множество решений; бесконечное множество решений.

5. Почему любая прямая из множества прямых, заданных уравнением $2x+3y=c$, где $c\in\boldsymbol{R}$, параллельна прямой $2x+3y=0$?

6. Установите, будут ли прямые, заданные уравнениями системы:

а) $\begin{cases} x+y=5,\\ x-2y=2;\end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y=3,\\ 8x+16y=15;\end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-3y=5,\\ 4x+6y=10,\end{cases}$

пересекаться; параллельны и не совпадать; совпадать.

7. Почему система уравнений $\begin{cases} 3x-y=2,\\ x+2y=a\end{cases}$ при любых действительных значениях параметра a имеет единственное решение?

8. При каких значениях параметра a несовместна система уравнений $\begin{cases} 3x-6y=2,\\ 2x+ay=3?\end{cases}$

9. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} 5x-y=3,\\ ax+2y=-6\end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений?

10. Вместо знака □ поставьте такое число, чтобы система не имела решения:

а) $\begin{cases} \square x+3y=1,\\ 2x-y=2;\end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y=\square,\\ \square x-y=1.\end{cases}$

11. Вместо знака □ поставьте такое число, чтобы система имела бесконечное множество решений:

а) $\begin{cases} 2x+y=3,\\ x+\square y=1{,}5;\end{cases}$ б) $\begin{cases} 3-\square y=\square,\\ 3x-2y=\square.\end{cases}$

12. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} ax+4y=8,\\ x+ay=-4;\end{cases}$ б) $\begin{cases} kx+5y=2,\\ x-2y=3;\end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y=2,\\ b^2x+4y=1;\end{cases}$ г) $\begin{cases} x+cy=5,\\ cx+y=1.\end{cases}$

§ 106. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ИСКЛЮЧЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

В основе решения системы линейных уравнений лежит метод алгебраического сложения. В качестве примера рассмотрим решение системы трех линейных уравнений с тремя переменными.

Решение системы трех линейных уравнений с тремя переменными выполняют по такому плану:

1. Записывают систему в «стандартном» виде: раскрывают все скобки; члены, содержащие переменные, переносят в левую часть уравнения, а свободные члены — в его правую часть; приводят подобные члены; в каждом уравнении системы соблюдают один и тот же порядок следования переменных.

2. Из каких-нибудь двух уравнений системы исключают одну из переменных.

3. Из полученных двух уравнений с двумя переменными исключают другую переменную.

4. Вычисляют значение третьей переменной и методом подстановки находят значение двух других переменных.

Пример 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 4y + 2z = -12, \\ y + 3x = 1 + 2z, \\ 3y - 9 = x + 2z. \end{cases}$$

Решение. 1. Запишем уравнения системы в стандартном виде:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 2z = -12, \\ 3x + y - 2z = 1, \\ -x + 3y - 2z = 9. \end{cases}$$

Разделим почленно первое уравнение системы на 2, получим систему:

$$\begin{cases} x - 2y + z = -6, \\ 3x + y - 2z = 1, \\ -x + 3y - 2z = 9. \end{cases}$$

2. Умножим почленно первое уравнение системы на —3 и прибавим его ко второму, получим: $7y - 5z = 19$.

Первое уравнение сложим с третьим, тем самым исключим x из третьего уравнения. Получим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} x - 2y + z = -6, \\ 7y - 5z = 19, \\ y - z = 3. \end{cases}$$

3. Умножим почленно третье уравнение на —7 и сложим со вторым уравнением; в результате получим третье уравнение системы без переменных x и y:

$$\begin{cases} x - 2y + z = -6, \\ 7y - 5z = 19, \\ 2z = -2. \end{cases}$$

4. Из последней системы имеем: $z = -1$, $y = \frac{19 + 5z}{7} = 2$,

$$x = -6 + 2y - z = -6 + 2 \cdot 2 - (-1) = -1.$$

Ответ: $(-1;\ 2;\ -1)$.

Пример 2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ -5x_2 + 3x_3 = -4, \\ -5x_2 + 3x_3 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ -5x_2 + 3x_3 = -4, \\ 0 \cdot x_3 = 6. \end{cases}$$

Последнее уравнение системы противоречиво, исходная система не имеет решений.

Пример 3*. При каком значении параметра a система

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 - ax_3 = 2 \end{cases}$$

не имеет решений?

Решение. Исходную систему уравнений сводим к виду:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_2 - x_3 = -2, \\ 7x_2 - (2 + a)x_3 = -4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -\frac{2}{3}, \\ (1 - 3a)x_3 = 2. \end{cases}$$

Если $1 - 3a = 0$, т. е. $a = \frac{1}{3}$, то третье уравнение системы не имеет смысла. Исходная система не имеет решений.

Ответ: $a = \frac{1}{3}$.

Пример 4*. При каком значении параметра a система

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 3, \\ -x_1 - ax_2 - 6x_3 = 2 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений?

Решение. Исходную систему линейных уравнений сводим к виду:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ -7x_2 + 7x_3 = -7, \\ (3 - a)x_2 - 7x_3 = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_2 - x_3 = 1, \\ -(a + 4)x_3 = a + 4. \end{cases}$$

Если $a+4=0$, т. е. $a=-4$, то последнее уравнение системы выполняется при любом действительном значении переменной.

Ответ: $a=-4$.

Задание. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1-5x_2+3x_3=-4, \\ 3x_1-2x_2+5x_3=1, \\ -2x_1+3x_2-x_3=1. \end{cases}$$

Непротиворечивое линейное уравнение с тремя переменными $ax+by+cz=d$ в координатном пространстве определяет единственную плоскость, если хотя бы один из коэффициентов a, b, c не равен нулю. Система трех таких линейных уравнений с тремя переменными задает в пространстве три плоскости:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Решить систему (I) — значит найти множество точек пространства, являющихся пересечением этих трех плоскостей.

Возможны следующие случаи взаимного расположения трех плоскостей в пространстве.

1. Все три плоскости различны:

а) плоскости пересекаются в одной точке (рис. 283) — система (I) совместна, имеет единственное решение;

б) плоскости попарно пересекаются, причем прямые пересечения плоскостей различны и не пересекаются (рис. 284) — система (I) несовместна, решений нет;

в) две плоскости параллельны, а третья их пересекает (рис. 285) — система (I) несовместна, решений нет;

г) плоскости пересекаются по прямой, принадлежащей каждой из них (рис. 286),— система (I) имеет бесконечное множество решений (множество точек прямой);

д) плоскости параллельны между собой (рис. 287) — система несовместна, решений нет.

2. Две плоскости совпадают:

а) совпавшие плоскости пересекаются третьей (рис. 288) — система (I) совместна, имеет бесконечное множество решений (множество точек прямой);

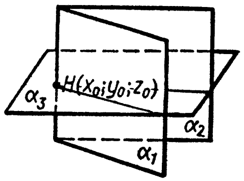


Рис. 283

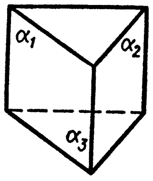


Рис. 284

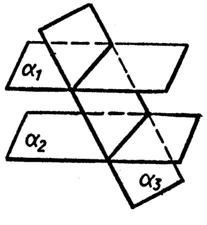


Рис. 285

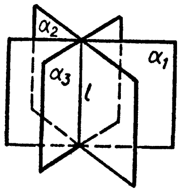


Рис. 286

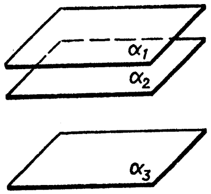


Рис. 287

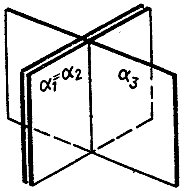


Рис. 288

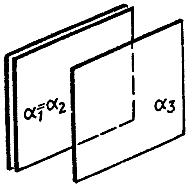


Рис. 289

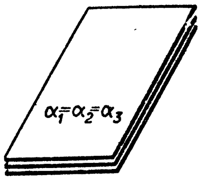


Рис. 290

б) совпавшие плоскости параллельны третьей (рис. 289) — система (I) несовместна, решений нет.

3. Все три плоскости совпадают (рис. 290). В этом случае система (I) совместна и имеет бесконечное множество решений (множество точек плоскости).

Упражнения

1. Расскажите план решения системы двух линейных уравнений с тремя переменными.

2. Проиллюстрируйте геометрически решение системы трех линейных уравнений с тремя переменными. Рассмотрите все возможные случаи расположения трех плоскостей в пространстве, выполните соответствующие рисунки. Результаты запишите в виде таблицы:

№ п/п	Взаимное расположение плоскостей	Пересечение плоскостей (фигура)	Число решений системы

3. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+2y-z=8, \\ 3x+5y+2z=7, \\ x-3y+z=-8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-3y+5z=14, \\ 2x-5y+z=9, \\ -3x+y+2z=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+2y=21-4z, \\ y+3z=13-2x, \\ 3x+5y=3z; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3=1, \\ x_1+3x_2-x_3=4, \\ 5x_1-2x_2-3x_3=18; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=5, \\ 2x_1-3x_2+4x_3=1, \\ x_1-5x_2+5x_3=7; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3=1, \\ 3x_1+2x_2-x_3=4, \\ 8x_1-13x_2+19x_3=9; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3=-2, \\ 3x_1+x_2-3x_3=10, \\ 4x_1-2x_2-5x_3=11; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3=6, \\ 3x_1+5x_2-x_3=8, \\ 2x_1+8x_2-5x_3=3; \end{cases}$

и) $\begin{cases} x_1+4x_2-x_3=5, \\ -2x_1-3x_2+x_3=4, \\ 5x_2-x_3=14. \end{cases}$

4. Система трех линейных уравнений с тремя переменными имеет единственное решение. Как в пространстве взаимно расположены плоскости, определяемые уравнениями системы?

5. Система трех линейных уравнений с тремя переменными имеет бесконечное множество решений. Как могут быть взаимно расположены в пространстве плоскости, определяемые уравнениями этой системы?

6*. При каком значении параметра a система уравнений не имеет решений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + ax_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 5ax_3 = 2? \end{cases}$$

7*. Решите системы уравнений методом последовательного исключения переменных:

а) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 5x_1 + 9x_2 - 11x_3 + x_4 = 11, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 7; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -8, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -5, \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -11. \end{cases}$$

§ 107. НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

С примерами решения некоторых нелинейных уравнений мы уже встречались. Например, мы решали показательные, логарифмические, тригонометрические, иррациональные, алгебраические уравнения второй (в частных случаях и более высокой) степени. В данном параграфе рассмотрим отдельные приемы решения нелинейных систем уравнений. Систему уравнений называют нелинейной, если хотя бы одно из ее уравнений нелинейно. Примерами нелинейных систем уравнений могут служить системы:

а) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^3 - y^3 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2, \\ x - y = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 1 + \log_2 9, \\ x + y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sin x + \cos x = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Способы решения нелинейных систем уравнений весьма разнообразны. Общим для всех них является замена исходной системы равносильной ей более простой системой или совокупностью более простых систем. Допустимо также при решении систем выполнять над уравнениями такие преобразования, которые приводят к расширению области допустимых значений переменных, т. е. переходить к неравносильным системам. При таком переходе, как известно, возможно появление посторонних корней. Такие корни необходимо выявить и отбросить, например путем проверки исходной системы. В этом случае проверка становится обязательным элементом решения системы.

Выполнять над системой (или отдельными ее уравнениями) преобразования, приводящие к потере корней, недопустимо.

Рассмотрим способы решения систем нелинейных уравнений.

Способ подстановки. Порядок решения системы линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки состоит в следующем:

1. Из одного уравнения системы выражаем одну переменную как функцию другой переменной.
2. Исключаем эту переменную из второго уравнения.
3. Решаем полученное уравнение относительно второй переменной.
4. По найденным значениям второй переменной из первого уравнения находим соответствующие им значения первой переменной.
5. В необходимых случаях выполняем проверку исходной системы и записываем ответ.

Пример 1. Решите систему уравнений $\begin{cases} y + x^2 = 5, \\ y^2 + x^4 = 17. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} y + x^2 = 5, \\ y^2 + x^4 = 17; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 5 - x^2, \\ (5 - x^2)^2 + x^4 = 17; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 5 - x^2, \\ x^4 - 5x^2 + 4 = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение полученной системы представляет собой биквадратное уравнение. Решим его отдельно:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0,$$

обозначим x^2 через u, получим:

$$u^2 - 5u + 4 = 0, \ u = 4 \text{ или } u = 1.$$

$$x^2 = 4, \ x_1 = 2, \ x_2 = -2;$$
$$x^2 = 1, \ x_3 = 1, \ x_4 = -1.$$

Из первого уравнения системы находим соответствующие значения переменной y: $y_1 = 1$; $y_2 = 1$; $y_3 = 4$; $y_4 = 4$.

Так как примененные нами преобразования не нарушали равносильности систем уравнения, то проверка полученных решений не обязательна.

Ответ: (2; 1); (−2; 1); (1; 4); (−1; 4).

Пример 2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y - xy = 14, \\ x + 2y + xy = -7. \end{cases}$$

Решение. Замечаем, что почленное сложение уравнений системы позволяет исключить выражение xy. Выполнив это преобразование, получим уравнение $3x + y = 7$.

Присоединив к полученному уравнению одно из уравнений данной системы, получим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases}2x - y - xy = 14,\\ 3x + y = 7.\end{cases}$$

Далее систему решаем способом подстановки:

$$\begin{cases}2x - y - xy = 14,\\ y = 7 - 3x;\end{cases}\quad \begin{cases}2x - (7 - 3x) - x(7 - 3x) = 14,\\ y = 7 - 3x;\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x^2 - 2x - 21 = 0,\\ y = 7 - 3x.\end{cases}$$

Первое уравнение системы есть квадратное уравнение. Решаем его отдельно:

$$3x^2 - 2x - 21 = 0,$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 252}}{6},\ x = \frac{2 \pm 16}{6},\ x_1 = 3,\ x_2 = -\frac{7}{3}.$$

Из уравнения $y = 7 - 3x$ находим соответствующие значения переменной y: $y_1 = -2$; $y_2 = 14$.

Проверка полученных решений не обязательна, так как примененные нами преобразования не нарушали равносильности систем.

Ответ: $(3;\ -2)$; $\left(-\frac{7}{3};\ 14\right)$.

Пример 3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}3^{2x} \cdot 3^{-y} - 81 = 0,\\ \lg x + \lg y = 1 + \lg 3.\end{cases}$$

Решение. Левую и правую части второго уравнения можно потенцировать. При этом нарушится равносильность этого уравнения и всей системы: будет расширена область допустимых значений переменных, что может привести к приобретению посторонних корней. Проверка полученных решений, таким образом, становится обязательной.

$$\begin{cases}3^{2x - y} = 3^4,\\ \lg xy = \lg 10 + \lg 3;\end{cases}\quad \begin{cases}2x - y = 4,\\ xy = 30.\end{cases}$$

Теперь применяем способ подстановки:

$$\begin{cases}y = 2x - 4,\\ xy = 30;\end{cases}\quad \begin{cases}y = 2x - 4,\\ x(2x - 4) = 30;\end{cases}\quad \begin{cases}y = 2x - 4,\\ 2x^2 - 4x - 30 = 0.\end{cases}$$

Решаем квадратное уравнение:

$$x^2 - 2x - 15 = 0,\ x_1 = -3,\ x_2 = 5.$$

$x = -3$ — посторонний корень, так как при этом значении переменной $\lg x$, входящий в систему, теряет смысл.

Находим значение y при $x = 5$: $y = 2 \cdot 5 - 4 = 6$.

Проверка:

$$3^{2 \cdot 5} \cdot 3^{-6} - 81 = 3^{10} \cdot 3^{-6} - 81 = 3^4 - 81 = 0,$$

$$\lg 5 + \lg 6 = \lg 30 = \lg(10 \cdot 3) = 1 + \lg 3.$$

Ответ: $(5;\ 6)$.

Задание 1. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases}x - y = 2,\\ x^2 + 3xy = 70;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x + xy = 8,\\ 3xy + 2y = 24;\end{cases}$

в) $\begin{cases}xy - x + y = 7,\\ xy + x - y = 13;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8},\\ x + y = 12.\end{cases}$

Способ разложения одного из уравнений на линейные множители. Способ основан на преобразовании системы нелинейных уравнений к виду

$$\begin{cases}(ax + by)(cx + dy) = 0,\\ f(x;\ y) = 0.\end{cases}$$

Если такое преобразование удается выполнить, то система сводится к совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}ax + by = 0,\\ f(x;\ y) = 0;\end{cases}\\ \begin{cases}cx + dy = 0,\\ f(x;\ y) = 0,\end{cases}\end{array}\right.$$

каждую из которых затем решают способом подстановки.

Рассмотрим примеры.

Пример 4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}xy + 4x - 5y = 20,\\ x^2 + 3xy + 2y^2 = 42.\end{cases}$$

Решение. Рассмотрим отдельно первое уравнение системы:

$$xy + 4x - 5y = 20,$$
$$xy + 4x - 5y - 20 = 0.$$

Теперь левую его часть можно разложить на множители способом группировки:

$$x(y + 4) - 5(y + 4) = 0,$$
$$(y + 4)(x - 5) = 0.$$

Таким образом, данную систему удалось преобразовать в равносильную ей систему:

$$\begin{cases}(y + 4)(x - 5) = 0,\\ x^2 + 3xy + 2y^2 = 42.\end{cases}$$

Полученную систему нетрудно свести к равносильной совокупности систем, каждую из которых можно решить способом подстановки:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y+4=0,\\ x^2+3xy+2y^2=42;\end{cases}\\ \begin{cases} x-5=0,\\ x^2+3xy+2y^2=42;\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=-4,\\ x^2+3xy+2y^2=42;\end{cases}\\ \begin{cases} x=5,\\ x^2+3xy+2y^2=42;\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=-4,\\ x^2-12x+32=42;\end{cases}\\ \begin{cases} x=5,\\ 25+15y+2y^2=42.\end{cases}\end{array}\right.$$

Вторые уравнения в каждой системе представляют собой квадратные уравнения, которые решаем отдельно:

а) $x^2-12x+32=42,\ x^2-12x-10=0,\ x=6\pm\sqrt{36+10}=6\pm\sqrt{46},\ x_1=6+\sqrt{46},\ x_2=6-\sqrt{46};$

б) $25+15y+2y^2=42,\ 2y^2+15y-17=0,\ y=\frac{-15\pm\sqrt{225+136}}{4}=\frac{-15\pm19}{4},\ y_1=1,\ y_2=-8{,}5.$

Полученная выше совокупность двух систем сводится, таким образом, к равносильной ей совокупности четырех систем:

$$\begin{cases} x=6+\sqrt{46},\\ y=-4,\end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=6-\sqrt{46},\\ y=-4,\end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=5,\\ y=1,\end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=5,\\ y=-8{,}5.\end{cases}$$

Проверка полученных решений не обязательна, так как примененные преобразования не нарушали равносильности систем.

Ответ: $(6+\sqrt{46};\ -4)$; $(6-\sqrt{46};\ -4)$; $(5;\ 1)$; $(5;\ -8{,}5)$.

Пример 5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0,\\ x^2-xy-2x-3y=6.\end{cases}$$

Решение. Левую часть первого уравнения системы можно разложить на линейные множители способом группировки:

$$x^2-2xy-3y^2=0,\quad x^2+xy-3xy-3y^2=0,$$
$$x(x+y)-3y(x+y)=0;\quad (x+y)(x-3y)=0.$$

Данную систему можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{cases} (x-3y)(x+y)=0,\\ x^2-xy-2x-3y=6;\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-3y=0,\\ x^2-xy-2x-3y=6;\end{cases}\\ \begin{cases} x+y=0,\\ x^2-xy-2x-3y=6;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=3y,\\ 2y^2-3y-2=0;\end{cases}\\ \begin{cases} x=-y,\\ 2y^2-y-6=0;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=-1{,}5,\\ y=-0{,}5;\end{cases}\\ \begin{cases} x=6,\\ y=2;\end{cases}\end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=-2,\\ y=2;\end{cases}\\ \begin{cases} x=\frac{3}{2},\\ y=-\frac{3}{2}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-\frac{3}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$, $(6;\ 2)$, $(-2;\ 2)$, $\left(\frac{3}{2};\ -\frac{3}{2}\right)$.

Задание 2. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0,\\ 3xy+7y=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2-5xy+2y^2=0,\\ x^2-3xy+y^2=1;\end{cases}$

в) $\begin{cases} 3y^2-2xy=160,\\ y^2-3xy-2x^2=8;\end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2-2xy-y^2=2,\\ xy+y^2=4.\end{cases}$

Способ сведения системы к квадратному уравнению. Системы вида $\begin{cases} f(x)+\varphi(y)=a,\\ f(x)\cdot\varphi(y)=b,\end{cases}$ а также системы, приводящиеся к такому виду, можно свести к квадратному уравнению. Действительно, если функции $f(x)$ и $\varphi(y)$ рассматривать как корни квадратного уравнения некоторой переменной z, то по теореме Виета можно записать $z^2-az+b=0$. И если z_1 и z_2 — корни этого уравнения, то данную систему можно привести к совокупности систем:

$$\begin{cases} f(x)=z_1,\\ \varphi(y)=z_2\end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x)=z_2,\\ \varphi(y)=z_1.\end{cases}$$

Пример 6. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=8,\\ xy=7.\end{cases}$$

Решение. Составим квадратное уравнение $z^2-8z+7=0$. Найдем его корни: $z_1=1$, $z_2=7$. Данная система свелась к совокупности систем:

$$\begin{cases} x=1,\\ y=7\end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=7,\\ y=1.\end{cases}$$

Ответ: $(1;\ 7)$; $(7;\ 1)$.

Пример 6 нетрудно было решить и способом подстановки.

Пример 7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=10,\\ xy=-3.\end{cases}$$

Решение. Возведем обе части второго уравнения системы в квадрат. Это преобразование может привести к приобретению посторонних корней. Проверка корней, таким образом, становится необходимым элементом решения. Получим систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=10,\\ x^2y^2=9.\end{cases}$$

Далее решаем систему способом сведения ее к квадратному уравнению:

$$z^2-10z+9=0,\ z_1=1,\ z_2=9.$$

Данная система приводится к совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2=1,\\ y^2=9;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2=9,\\ y^2=1,\end{cases}\end{array}\right.$$

которая в свою очередь приводится к совокупности восьми систем:

$$\begin{cases}x=1,\\ y=3,\end{cases}\text{или}\begin{cases}x=1,\\ y=-3,\end{cases}\text{или}\begin{cases}x=-1,\\ y=3,\end{cases}\text{или}\begin{cases}x=-1,\\ y=-3,\end{cases}\text{или}$$

$$\begin{cases}x=3,\\ y=1,\end{cases}\text{или}\begin{cases}x=3,\\ y=-1,\end{cases}\text{или}\begin{cases}x=-3,\\ y=1,\end{cases}\text{или}\begin{cases}x=-3,\\ y=-1.\end{cases}$$

Проверка полученных корней позволяет отбросить посторонние: $(1;\ 3)$; $(-1;\ -3)$; $(3;\ 1)$; $(-3;\ -1)$.

Ответ: $(1;\ -3)$; $(-1;\ 3)$; $(-3;\ 1)$; $(3;\ -1)$.

Пример 8. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}y+\lg x=1,\\ x^y=0{,}01.\end{cases}$$

Решение. Прологарифмируем по основанию 10 обе части второго уравнения системы. Это преобразование не приведет к изменению области допустимых значений переменной, так как $x^y>0$; $0{,}01>0$ и $x>0$ (см. первое уравнение). Получим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases}y+\lg x=1,\\ y\cdot\lg x=\lg 0{,}01;\end{cases}\quad\begin{cases}y+\lg x=1,\\ y\lg x=-2.\end{cases}$$

Теперь полученную систему сведем к квадратному уравнению: $z^2-z-2=0$, откуда $z_1=-1$, $z_2=2$. Данная система свелась к совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\lg x=-1,\\ y=2;\end{cases}\\ \begin{cases}\lg x=2,\\ y=-1;\end{cases}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0{,}1,\\ y=2;\end{cases}\\ \begin{cases}x=100,\\ y=-1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(0{,}1;\ 2)$; $(100;\ -1)$.

Задание 3. Решите систему уравнений:

$$\text{а)}\ \begin{cases}x+y=-3,\\ xy=2;\end{cases}\qquad\text{б)}\ \begin{cases}x-y=2,\\ xy=15;\end{cases}$$

$$\text{в)}\ \begin{cases}x^2+y^2=10,\\ xy=4;\end{cases}\qquad\text{г)}\ \begin{cases}\lg x+\lg y=1,\\ \lg x\cdot\lg y=-2.\end{cases}$$

Способ замены переменных. Способ замены переменных позволяет нелинейную систему уравнений свести к такой системе (или совокупности систем), решать которые мы умеем.

Пример 9. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}x^{-1}-y^{-1}=2,\\ x^{-2}-y^{-2}=16.\end{cases}$$

Решение. Введем новые переменные: $x^{-1}=u$, $y^{-1}=v$. Система примет вид:

$$\begin{cases}u-v=2,\\ u^2-v^2=16;\end{cases}\quad\begin{cases}u-v=2,\\ (u+v)(u-v)=16;\end{cases}\quad\begin{cases}u-v=2,\\ 2(u+v)=16;\end{cases}$$

$$\begin{cases}u-v=2,\\ u+v=8;\end{cases}\quad\begin{cases}u-v=2,\\ 2u=10;\end{cases}\quad\begin{cases}u=5,\\ v=3.\end{cases}$$

Возвратимся теперь к исходным переменным:

$$\begin{cases}x^{-1}=5,\\ y^{-1}=3;\end{cases}\quad\begin{cases}x=\frac{1}{5},\\ y=\frac{1}{3}.\end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{5};\ \frac{1}{3}\right)$.

Пример 10. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt[4]{x+y}-\sqrt[4]{x-y}=2,\\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8.\end{cases}$$

Решение. Введем новые переменные: $\sqrt[4]{x+y}=u$, $\sqrt[4]{x-y}=v$. Данная система принимает вид:

$$\begin{cases}u-v=2,\\ u^2-v^2=8;\end{cases}\quad\begin{cases}u-v=2,\\ (u-v)(u+v)=8;\end{cases}\quad\begin{cases}u-v=2,\\ 2(u+v)=8;\end{cases}$$

$$\begin{cases}u-v=2,\\ u+v=4;\end{cases}\quad\begin{cases}u-v=2,\\ 2u=6;\end{cases}\quad\begin{cases}u=3,\\ v=1.\end{cases}$$

Возвратимся к исходным переменным:

$$\begin{cases}\sqrt[4]{x+y}=3,\\ \sqrt[4]{x-y}=1.\end{cases}$$

Обе части каждого уравнения возведем в четвертую степень. Это преобразование может привести к приобретению посторонних корней. Проверка становится обязательной частью решения.

$$\begin{cases}x+y=81,\\ x-y=1;\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=81,\\ 2x=82;\end{cases}\quad\begin{cases}x=41,\\ y=40\end{cases}$$

Проверка: $\sqrt[4]{41+40}-\sqrt[4]{41-40}=3-1=2.$

$$\sqrt{41+40}-\sqrt{41-40}=9-1=8.$$

Ответ: $(41;\ 40)$.

Задание 4. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{31}{15}, \\ x^2+y^2=31; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{41}{20}, \\ x+y=41; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x}+2\sqrt{y}=9, \\ x-4y=9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5^{\sqrt[3]{x}}\cdot 2^{\sqrt{y}}=200, \\ 25^{\sqrt[3]{x}}+2^{2\sqrt{y}}=689. \end{cases}$

Графический способ. Графический способ решения системы двух уравнений с двумя переменными $\begin{cases} f(x, y)=0, \\ \varphi(x, y)=0 \end{cases}$ состоит в отыскании точек пересечения линий $f(x, y)=0$ и $\varphi(x, y)=0$.

Пример 11. Решите графически систему уравнений:

$$\begin{cases} y-x^2=4x+4, \\ 2x+y=-4. \end{cases}$$

Решение. Строим в одной и той же системе координат параболу $y=x^2+4x+4$ и прямую $y=-2x-4$ (рис. 291). Находим значения координат точек пересечения параболы и прямой: $A(-4;\ 4)$ и $B(-2;\ 0)$. Получили решения данной системы: $(-4;\ 4)$, $(-2;\ 0)$.

Пример 12. Решите графически систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x-6y-6=0, \\ x^2+y^2+8x+2y-32=0. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение системы можно преобразовать, выделив полные квадраты:

$$x^2+2x+1-1+y^2-6y+9-9-6=0,$$

или

$$(x+1)^2+(y-3)^2=16.$$

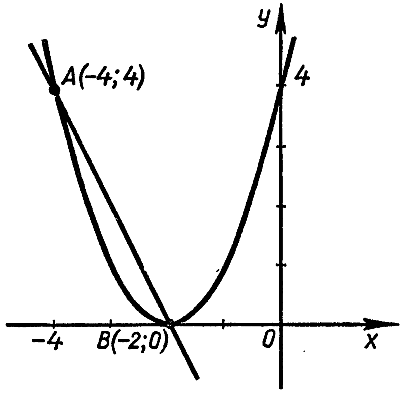


Рис. 291

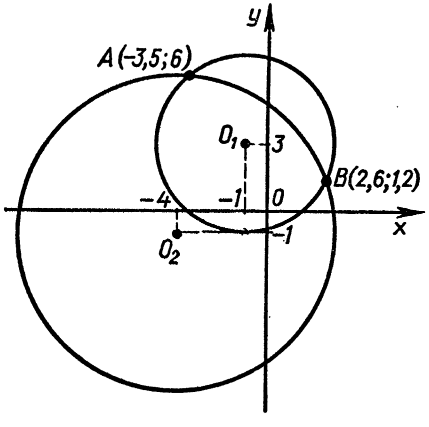


Рис. 292

Получили уравнение окружности с центром в точке O_1 $(-1;\ 3)$ радиуса 4 единицы. Построим эту окружность (рис. 292).

Аналогично можно преобразовать второе уравнение системы:

$$x^2+8x+16-16+y^2+2y+1-1-32=0,$$

или

$$(x+4)^2+(y+1)^2=49.$$

Получили окружность с центром в точке O_2 $(-4;\ -1)$ радиуса 7 единиц. Построим эту окружность (рис. 292). Построенные окружности пересекаются в двух точках A и B, координаты которых служат решением системы. По рисунку находим приближенные значения координат.

Ответ: $(-3{,}5;\ 6)$; $(2{,}6;\ 1{,}2)$.

Задание 5. Решите графически системы уравнений:

а) $\begin{cases} y-2x=0, \\ y+2x=x^2+4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-4x-6y=20, \\ xy=-8. \end{cases}$

Упражнения

1. Составьте конспект параграфа. Приведите по одному примеру систем уравнений, решаемых каждым из рассмотренных способов.

2. В каких случаях проверка полученных решений системы обязательна, а в каких не обязательна?

3. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x-y=3, \\ xy=10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=42, \\ (x-5)(y+4)=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^3+y^3=-19, \\ x+y=-1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x+y)(x^2-y^2)=63, \\ x+y=3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \log_3 x+\log_3 y=1, \\ x+y=4; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=-3; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x^2-y^2=0, \\ x^2+2x-y=12; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=9, \\ \sqrt{xy}=6; \end{cases}$

и) $\begin{cases} x^2-xy+2y^2=0, \\ 2x^2-5y+xy=-1. \end{cases}$

4. Решите графически системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=36, \\ x^2+6y=36; \end{cases}$ б)* $\begin{cases} x=y^2+5y, \\ y=x^2+5x. \end{cases}$

5*. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2-3xy+5y^2=3, \\ 2x^2+xy-3y^2=7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \lg x+\lg y=5, \\ \lg x\cdot\lg y=6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{6}, \\ xy=36; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2^{\cos x}+2^{\sec y}=5, \\ 2^{\cos x}\cdot 2^{\sec y}=4. \end{cases}$

§ 108. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ И СИСТЕМ НЕРАВЕНСТВ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Решить неравенство $f(x;\ y)>0$ — это значит найти множество всех значений переменных, при подстановке которых в данное неравенство получается верное числовое неравенство.

Если неравенство содержит только две переменные, т. е. имеет вид $f(x;\ y)>0$, то множество его решений — множество упорядоченных пар чисел. Каждая такая пара геометрически изображается точкой плоскости. Множество решений неравенства с двумя переменными графически изображается множеством точек плоскости, т. е. фигурой на плоскости. На рисунках 293 — 298 приведены соответственно решения неравенств:

$y<x$; $y\geqslant -x^2+2x$; $y^2+x^2<4$; $y\geqslant x^3$; $y\geqslant x^2+4x+3$; $y>x^{-1}$.

Для изображения множества решений неравенства $f(x;\ y)>0$ на координатной плоскости поступают следующим образом:

1. Строят график уравнения $f(x;\ y)=0$; линия разбивает плоскость на несколько областей.

2. Проверяют выполнимость неравенства $f(x;\ y)>0$ для произвольной точки $(x;\ y)$ каждой области.

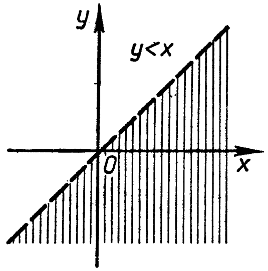


Рис. 293

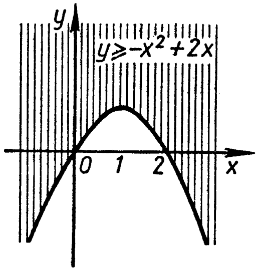


Рис. 294

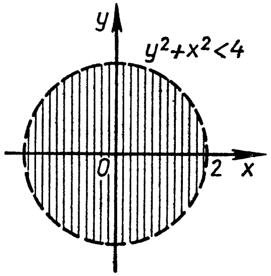


Рис. 295

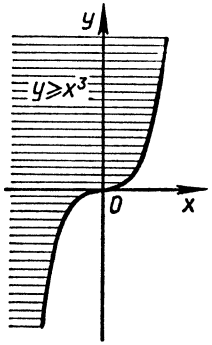


Рис. 296

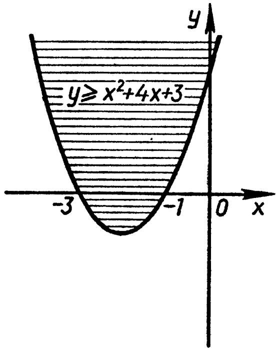


Рис. 297

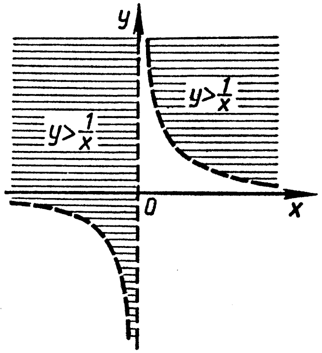


Рис. 298

3. Если неравенство выполняется в этой точке, то оно выполняется и во всей рассматриваемой области.

Если неравенство нестрогое, то множество точек линии $f(x;\ y)=0$ (границу области) включают в множество решений данного неравенства. В этом случае границу фигуры изображают сплошной линией. Если неравенство строгое, то точки линии $f(x;\ y)=0$ не включают в множество решений и границу фигуры изображают штриховой линией.

Примеры. Изобразите на координатной плоскости множества решений неравенств:

1) $3y-2x>6$; 2) $y\geqslant x^2+2x$; 3) $x^2-4x+y^2+6y-12\leqslant 0$.

Решение. 1. а) Штриховой линией строим график уравнения $3y-2x=6$.

б) Пусть $A(0;\ 3)$ — контрольная точка, тогда $3\cdot 3-2\cdot 0>6$.

в) Для каждой точки $(x;\ y)$ верхней полуплоскости (рис. 299) выполняется неравенство $3y-2x>6$.

2. а) Строим параболу $y=x^2+2x$.

б) Пусть $A(0;\ 3)$ — контрольная точка, тогда $3\geqslant 0^2+2\cdot 0$.

в) Для каждой точки заштрихованной на рисунке 300 области, включая точки ее границы, выполняется неравенство $y\geqslant x^2+2x$.

3. а) Строим окружность $x^2-4x+y^2+6y-12=0$, $(x-2)^2+(y+3)^2=25$.

б) Пусть $A(0;\ 5)$ — контрольная точка, тогда $0-4\cdot 0+$ $+25+30-12>0$.

в) Для каждой точки заштрихованного круга, включая точки его границы (рис. 301), выполняется неравенство $x^2-4x+y^2+6y-12\leqslant 0$.

Задание 1. По рисункам 302—307 запишите неравенства, считая их решением заштрихованные области координатной плоскости.

Задание 2. Изобразите множества решений неравенств на координатной плоскости:

а) $y\geqslant x+3$; б) $y<x-4$;

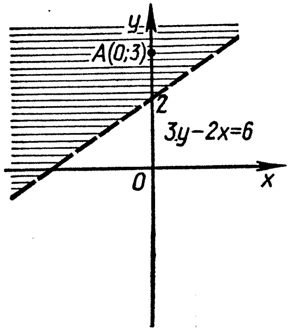


Рис. 299

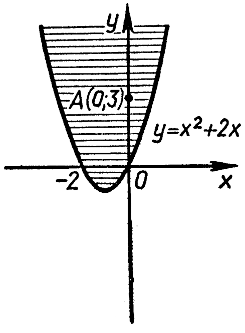


Рис. 300

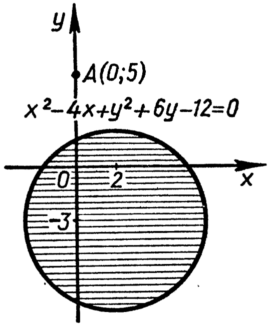


Рис. 301

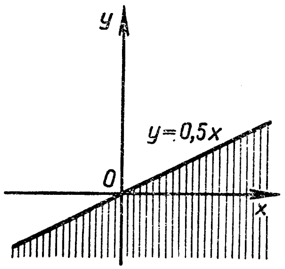


Рис. 302

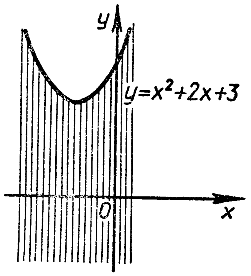


Рис. 303

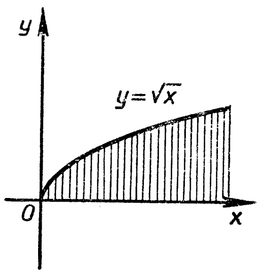


Рис. 304

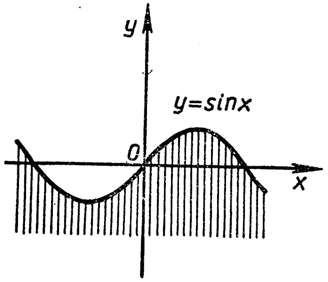


Рис. 305

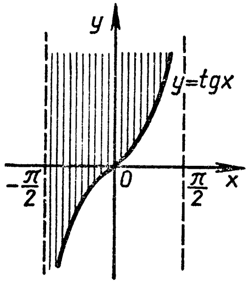


Рис. 306

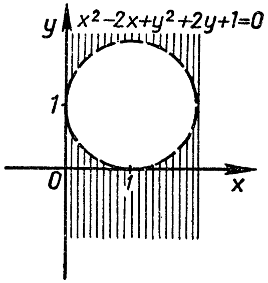


Рис. 307

в) $(x-6)^2+(y-5)^2\leqslant 4$;   г) $y+x^2-3x>0$;

д)* $y+\frac{1}{x}<0$;   е)* $y>(x-1)^{-1}$.

Решением системы неравенств с двумя переменными называется упорядоченная пара чисел, удовлетворяющая каждому неравенству системы. Множество решений системы неравенств — это пересечение множеств решений всех неравенств, входящих в эту систему.

На рисунке 308 показано решение системы двух неравенств с двумя переменными:

$$\begin{cases} y\geqslant f(x), \\ y\geqslant \varphi(x). \end{cases}$$

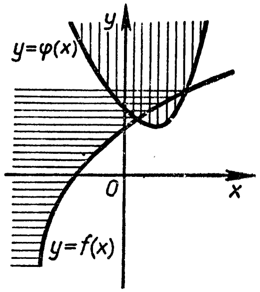


Рис. 308

Примеры. Изобразите множество решений системы неравенств на координатной плоскости:

1) $\begin{cases} x+y+1\geqslant 0, \\ x^2+y^2\leqslant 25; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y\geqslant 0, \\ 2x+y\leqslant 4, \\ x+4y\geqslant -1, \\ x+4y\leqslant 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y+4x+18\geqslant 2y+2x+9, \\ y+6x\geqslant 2x^2+4x-7. \end{cases}$

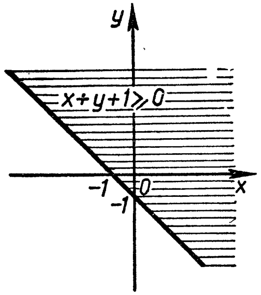


Рис. 309

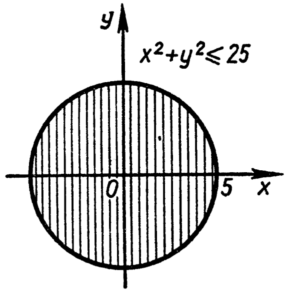


Рис. 310

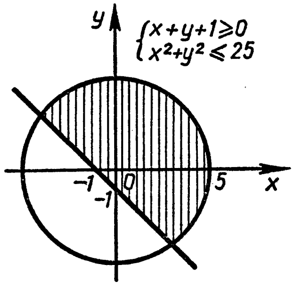


Рис. 311

Решение. 1. Для каждой точки полуплоскости, покрытой штриховкой, с границей $x+y+1=0$ (рис. 309) выполняется неравенство $x+y+1\geqslant 0$. Для каждой точки круга с границей $x^2+y^2=25$ (рис. 310) выполняется неравенство $x^2+y^2\leqslant 25$. Множество решений данной системы есть пересечение полученных множеств точек — круговой сегмент (рис. 311).

2. Множество решений каждого из неравенств данной системы изображается точками полуплоскости (см. соответственно рис. 312—315). Множество решений данной системы неравенств есть пересечение четырех полуплоскостей, т. е. множество точек параллелограмма (рис. 316).

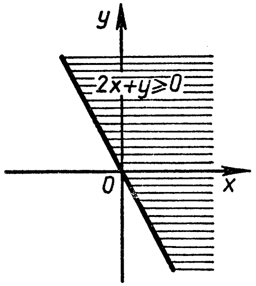


Рис. 312

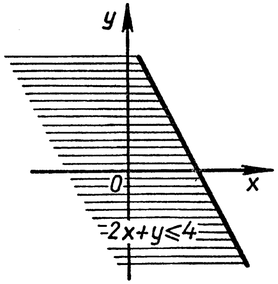


Рис. 313

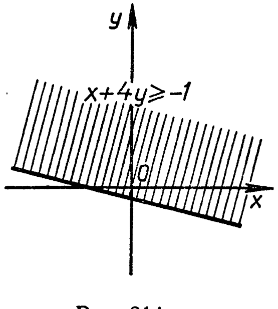


Рис. 314

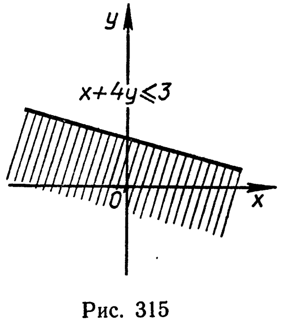


Рис. 315

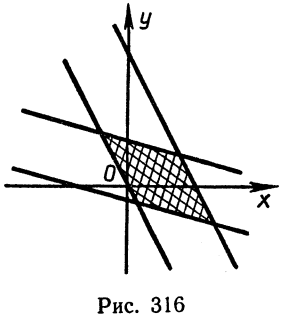


Рис. 316

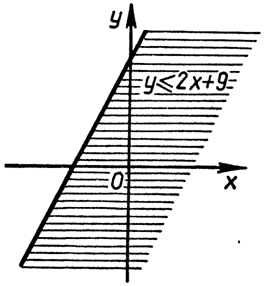


Рис. 317

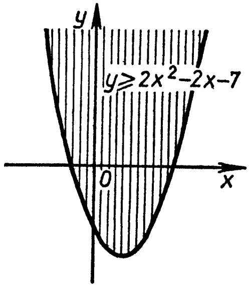


Рис. 318

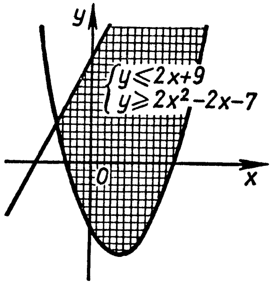


Рис. 319

3. $\begin{cases} y+4x+18 \geqslant 2y+2x+9, \\ y+6x \geqslant 2x^2+4x-7; \end{cases}$ $\begin{cases} y \leqslant 2x+9, \\ y \geqslant 2x^2-2x-7. \end{cases}$

Решение неравенства $y \leqslant 2x+9$ изображено точками полуплоскости, заштрихованной на рисунке 317. Решение неравенства $y \geqslant 2x^2-2x-7$ изображено на рисунке 318. Множество решений системы — пересечение двух множеств (рис. 319).

Задание 3. Изобразите на координатной плоскости множества решений систем неравенств:

а) $\begin{cases} x+y-2 \geqslant 0, \\ y \leqslant 1+x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x| \geqslant 3, \\ x+y \leqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} |x| \leqslant 1, \\ y+x > 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 9, \\ x-2y > 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y+x^2 \leqslant 0, \\ x^2+y^2 \leqslant 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x^2+y-1 \leqslant 0, \\ x+y \geqslant -1. \end{cases}$

Задание 4*. Изобразите на координатной плоскости области определения функций:

а) $z=\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$; б) $z=\frac{1}{x-y}+\lg(y-x^2)$;

в) $z=\frac{1}{\sqrt{x-y}}+\sqrt{x+y}$.

Упражнения

1. Что понимают под множеством решений неравенства с двумя переменными?

2. Дано неравенство $2x-y^2 \geqslant 5$. Установите, какие из следующих пар чисел являются решениями этого неравенства: (0; 1); (5; −2); (3; −1); (1; 3); (2,5; 0); (−1; −1).

3. Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

а) $y \leqslant x$; б) $y \geqslant x$; в) $y \leqslant x^2$; г) $y \geqslant x^2$;
д) $y+x > 1$; е) $y-x < 2$; ж) $y+x^2 < 1$; з) $y+x^2 > -1$;
и) $y^2+x^2 < 4$; к) $(y-1)^2+(x-1)^2 > 1$.

4. Что понимают под множеством решений системы неравенств с двумя переменными?

5. Изобразите на координатной плоскости множество решений систем неравенств:

а) $\begin{cases} y \leqslant x, \\ y \geqslant x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y < 1-x, \\ y+x > 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y > 1-x, \\ y+x < 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y < 1-x, \\ y+x < 2; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y \geqslant x^2+1, \\ y+x^2 \leqslant 2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2+y \leqslant 0, \\ 2x^2+y-1 \leqslant 0. \end{cases}$

6. Изобразите на координатной плоскости множество решений систем неравенств:

а) $\begin{cases} 2x-y \geqslant 1, \\ 2y \geqslant 4x+5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y \geqslant x^2+1, \\ y+2 \leqslant 2x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y \geqslant x^2, \\ x^2+y^2 \leqslant 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x-y \geqslant 1, \\ 2y \leqslant 4x+5; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y \leqslant -x^2+1, \\ x+y \geqslant 2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 9, \\ x+y \geqslant 0, \\ x-y \leqslant 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} |y| \leqslant 2, \\ y+2x < 3; \end{cases}$ з) $\begin{cases} y \geqslant x^2+1, \\ x^2+y^2 \leqslant 4; \end{cases}$

и) $\begin{cases} y+2x \geqslant x^2+1, \\ x^2+y^2-2x-2y+1 \geqslant 0; \end{cases}$ к)* $\begin{cases} |y|+|x| \leqslant 1, \\ x+y \geqslant 0; \end{cases}$

л)* $\begin{cases} y > x^2, \\ y^2 < x; \end{cases}$ м)* $\begin{cases} y \geqslant |x^2+2x|, \\ x^2+y^2-2x-6y+9 \leqslant 0. \end{cases}$

§ 109. ПОВТОРЕНИЕ

1. Сформулируйте основные преобразования, применяемые при решении уравнений. Какие из них могут привести к приобретению посторонних корней?

2. Является ли число 2 решением уравнения:

а) $3x+1=5x-3$; б) $\frac{1}{x-2}=1$;

в) $\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}=2x$; г) $\lg(7x-4)-1=0$;

д) $\lg(4-7x)-1=0$; е) $\sqrt{x^2-20}=4$?

3. Найдите такое значение параметра p, при котором уравнение $x^2-2x+p=0$ имеет корень: а) $x=-1$; б) $x=0$; в) $x=2$.

4. При каком значении параметра a число 2 является решением уравнения $x^3+3x^2+ax=0$?

5. Найдите область допустимых значений переменных в уравнениях:

а) $\sqrt{x-3}=\lg(5-x)$; б) $\frac{1}{x+3}-\frac{1}{y}=0$;

в) $2^{\frac{1}{\sin x}}=\sin y$; г) $\sqrt{x-3}=x-5$.

6. Решите уравнения:

а) $2^{x-3}(3x-1)\sqrt{(2-x)(x+5)}\cdot\log_2(5-x)=0$;

б) $\lg(x+3)=\lg x-\lg(x-3)$;

в) $\log_4(3x-4)-\log_4(5-x^2)=0{,}5$;

г) $1+\log_2(3x+1)=\log_2(x^2-5)$.

7. Какие из названных ниже преобразований могут привести к уравнению, не равносильному данному: а) приведение подобных членов; б) перенесение членов уравнения из одной части в другую; в) деление обеих частей уравнения на выражение, содержащее переменную; г) умножение обеих частей уравнения на выражение, содержащее переменную; д) возведение обеих частей уравнения в степень; е) извлечение корня из обеих частей уравнения; ж) потенцирование; з) логарифмирование? Почему это происходит?

8. Найдите несколько решений каждого из следующих уравнений:

а) $x-2y=0$; б) $3x-2y+5=0$.

9. Расскажите план решения системы двух линейных уравнений с параметром.

10. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=1, \\ ax+y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y=0, \\ ax+y=2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x+2by=4, \\ -4bx+5y=2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} ax+y=3, \\ 3x+2y=6; \end{cases}$ д) $\begin{cases} ax+y=3, \\ 2x-y=5. \end{cases}$

11. Для каждого из следующих уравнений найдите угол наклона соответствующей прямой к положительной полуоси абсцисс:

а) $x-y=5$; б) $2x+2y=3$; в) $y=\sqrt{3}x-1$.

12. Найдите, при каком значении параметра a график уравнения $ax+2y+5=0$ образует с положительной полуосью абсцисс угол 60°.

13. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+y-z=3, \\ 2x-y+z=0, \\ x-2y-2z=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2x-y-2z=2, \\ 3x-2y+4z=-5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y-z=6, \\ 2x+3y+z=9, \\ x+2y+4z=-1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-y-z=-2, \\ x+2y+z=3, \\ 2x+y-3z=7. \end{cases}$

14. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+2xy-4y^2-5x+4=0, \\ x-y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x^2+7y^2=148, \\ 3x^2-y^2=11; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+xy=15, \\ xy-x^2=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+xy+4y^2=6, \\ 3x^2+8y^2=11; \end{cases}$

д) $\begin{cases} xy+x+y=11, \\ x^2y+xy^2=30; \end{cases}$ е) $\begin{cases} xy(x^2+y^2)=300, \\ xy+x^2+y^2=37; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5, \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=13; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 3x^2-xy+4y^2=14, \\ 2x^2-xy+2y^2=8; \end{cases}$

и) $\begin{cases} x+y=2, \\ x^2=2y-1; \end{cases}$ к) $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0, \\ x^2+2xy+y^2=1; \end{cases}$

л) $\begin{cases} x^3+y^3=16, \\ xy=4; \end{cases}$ м) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7, \\ 5x^2-4xy+2y^2=5; \end{cases}$

н*) $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{y}}=\frac{1}{6}, \\ \sqrt[3]{xy}=6; \end{cases}$ о)* $\begin{cases} 4\sin x-\sin y=2, \\ \sin x-\sin y=\frac{1}{2}. \end{cases}$

15. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3^x+3^y=4, \\ 3^{x+y}=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \lg(x^2+y^2)=2-\lg 2, \\ \lg(x+y)+\lg(x-y)=\lg 48; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2=80, \\ \log_2 x+\log_2 y=5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3^x-3^y=6, \\ 3^{x+y}+3^{y-1}=28; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \log_3(y-x)=0, \\ x^2+y^2=25; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x-9y=6, \\ \log_2 x+\log_2 y=3; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \log_{0.6}(x^2-y^2)=1, \\ \log_2 x-\log_2 y=2; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 2^{\log_2 y}-\log_2 x=1, \\ y\log_2 x=2. \end{cases}$

16. Решите уравнения:

а) $\sqrt{x^2-5x+6}=x-1$; б) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x-1$;

в) $x-\sqrt{x+2}=4$; г) $2+\sqrt{2x+1}=x-5$;

д) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=4$.

17. Изобразите на координатной плоскости множества решений неравенств:

а) $y-2x>2$; б) $y+2x>x^2-1$.

18. Изобразите на координатной плоскости множества решений систем неравенств:

а) $\begin{cases} y-x+1\geqslant 0, \\ y+x-1\leqslant 0, \\ x\geqslant -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2y+x^2-2x\leqslant 0, \\ 3y+x+3\geqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 4, \\ y+x\geqslant 0, \\ x\geqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y-x\leqslant 1, \\ y+2x>x^2+2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} y\geqslant x, \\ x^2+y^2-8x-6y<11. \end{cases}$

§ 110. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Решите уравнение

$$3^{x+2}\sqrt{(x-3)(5+x)}\lg(x^2-8)=0.$$

2. Найдите значение параметра a, при котором прямая $2ax+3y-1=0$ образует с положительной полуосью абсцисс угол 45°.

3. Найдите значения a, при которых система имеет единственное решение:

$$\begin{cases} 2x-ay=3, \\ -ax+8y=-6. \end{cases}$$

4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y+2z=3, \\ 2x-2y+z=2, \\ 5x+y+7z=11. \end{cases}$$

5. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y=324, \\ \log_2(x-y)=1. \end{cases}$

6. Изобразите на координатной плоскости множества решений неравенств:

а) $2y-x<2$; б) $y+x^2<2x+1$.

7. Изобразите на координатной плоскости множества решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} y-x-1\leqslant 0, \\ y+x+1\geqslant 0, \\ x-2\leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 9, \\ y-x\leqslant 0, \\ x>0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2y-x^2+4x>0, \\ 3y-x-3\leqslant 0. \end{cases}$

Глава XI.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Представьте в виде десятичной дроби рациональные числа: $\frac{1}{2}$; $-2\frac{6}{7}$; $\frac{34}{75}$.

2. Представьте в виде обыкновенной дроби рациональные числа: 2,375; 0,(32); 0,45333 ... ; −1,03(25).

3. Докажите, что $\sqrt{12}$ не рациональное число.

4. Решите неравенства:

а) $|2x-1|<3$; б) $|4x+1|\geqslant 5$.

5. Решите неравенства:

а) $|x^2-3x|<2$; б) $|x-1|+|x-2|\leqslant 3$.

6. Найдите области определения функций:

а) $y=\frac{1}{x-1}$; б) $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$;

в) $y=\sqrt{x-1}$; г) $y=\sqrt{\frac{1}{x+2}}$.

7. Найдите области определения функций:

а) $y=\sqrt{2x-1}$; б) $y=\sqrt{3x^2+10x-5}$;

в) $y=\log_4(2x-3)-\log_{\frac{1}{4}}x$; г) $y=\log_{0.5}x+\log_2(3x-2)$;

д) $y=\sqrt{4x-x^3}+\lg(x^2-1)$; е) $y=\lg\frac{1-x}{1+x}$;

ж) $y=-x\ln x$; з) $y=\sqrt{x-1}+2\sqrt{3-x}$.

8. На рисунках 320, 321 изображены графики функций, заданных соответственно на промежутках $[0;\ 6]$, $]-\infty;\ \infty[$. Найдите аналитические задания этих функций.

9. Задайте аналитически функцию, обратную данной функции: а) $y=2x$; б) $y=\frac{x+3}{4}$; в) $y=x^3$; г) $y=2^x$.

10. Исходя из определения, установите, какие из следующих функций являются возрастающими, а какие — убывающими: а) $f(x)=x$; б) $g(x)=2^x$; в) $\varphi(x)=5-x$; г) $h(x)=-x^2+4x$.

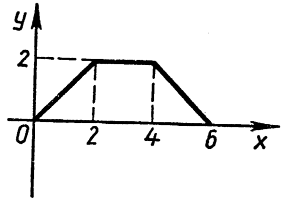


Рис. 320

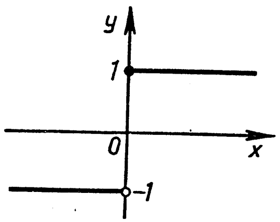


Рис. 321

11. Какая из следующих функций: а) $y=5$; б) $y=x$; в) $y=x^2$; г) $y=[x]$; д) $y=\sin 2x$ — является периодической? Найдите ее основной период.

12. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $f(x)=-x^2+6x$; б) $\varphi(x)=2^x-1$; в) $g(x)=2\sin 0{,}5x$.

13. Укажите номера членов последовательности $x_n=3n+2$, для которых выполняется условие: а) $x_n \leqslant 29$; б) $x_n > 100$.

14. Изобразите графически последовательности:

а) $y_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$; б) $a_1=4$, $a_{n+1}=a_n-2$.

15. Какое наименьшее число членов прогрессии 2; 5; 8; ..., начиная с первого, надо взять, чтобы их сумма была больше 100?

16. Найдите формулу, выражающую произведение членов геометрической прогрессии $u_3 \cdot u_5 \cdot u_7 \cdot \ldots \cdot u_{2n+1}$ через ее первый член и знаменатель.

17. Докажите, что чистая периодическая дробь $0,(m)$ с одной цифрой в периоде равна обыкновенной дроби $\frac{m}{9}$.

18. Сумма трех членов арифметической прогрессии равна 15, а девятый ее член равен 26. Сколько надо взять членов этой прогрессии, начиная с первого, чтобы их сумма была равна 155?

19. Сколько членов геометрической прогрессии надо сложить, начиная с первого, чтобы получить сумму 3069, если $u_1+u_5=51$, $u_2+u_6=102$?

20. Найдите такие значения u, при которых последовательность $\sqrt{u}$, $\sqrt{5u+4}$, $\sqrt{12u+13}$ обращается в арифметическую прогрессию.

21. Сумма первых трех членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии на 1 больше ее суммы. Найдите эту прогрессию, если ее сумма равна 27.

22. Точка движется по закону $s(t)=2t^2+3t+1$, где t — время в секундах, $s(t)$ — путь в метрах. Найдите среднюю скорость движения точки в течение первых пяти секунд.

23. Вычислите пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 8x}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+5x-6}$;

ж) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}$; з) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x^2-2x-3}{\sqrt{x}-1}$.

24. Найдите производные функций:

а) $y=2\sqrt[3]{x^2}+5x\cdot\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2}$; б) $y=(x^4+3x^2-1)^3$;

в) $y=(x+1)\sqrt{x^3}$; г) $y=1+\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$.

25. Найдите уравнение касательной к кривой $y=1{,}5x^2-3x+1$ в точке с абсциссой $x=2$.

26. Найдите промежутки возрастания и убывания и экстремумы функций:

а) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+7x$; б) $g(x)=x^5-5x^4+\frac{20}{3}x^3+1$;

в) $\varphi(x)=x-\frac{4}{x}$; г) $h(x)=2x^2-x^4$.

27. Следующие функции исследуйте на экстремум:

а) $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$; б) $f(x)=x^2\cdot e^{2x}$;

в) $f(x)=\frac{1-x^3}{x}$; г) $f(x)=(x-3)^2(x-2)^2$;

д) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$; е) $f(x)=\frac{x^3}{x-1}$;

ж) $f(x)=\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$; з) $f(x)=\frac{(x-2)(x+3)}{(x-5)^2}$.

28. Найдите наибольшие и наименьшие значения функций на заданных промежутках:

а) $f(x)=2x^3-9x^2+12x$, $[0;\ 3]$;
б) $f(x)=x^3-6x^2+9x$, $[0;\ 3]$;
в) $f(x)=9x+3x^2-x^3$, $[-2;\ 2]$;
г) $f(x)=2\cos x+3\sin x$, $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$;
д) $f(x)=2\cos x+\sin 2x$, $\left[-\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$;
е) $f(x)=\frac{3^{2+x}+2\cdot 3^{-x}}{\ln 3}+3x$, $[-2;\ 1]$.

29. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $f(x)=x^3-3x^2+2$; б) $\varphi(x)=8+2x^2-x^4$;

в) $g(x)=\frac{2}{1+x^2}$; г) $h(x)=\frac{3x-1}{x}$.

30. Для функции $f(x)=3x^2$ найдите первообразную, график которой проходит через точку (1; 2).

31. Применяя правила нахождения первообразной, найдите первообразные функций:

а) $f(x)=x-x^2$; б) $f(x)=3\sin x$;
в) $f(x)=\sin 3x$; г) $f(x)=\frac{3}{\sqrt[4]{x}}+x$;
д) $f(x)=\frac{7}{\sin^2 3x}$; е) $f(x)=e^{2x-3}$.

32. Исследуйте с помощью производной функции и постройте их графики:

а) $f(x)=-x^2+3x+10$; б) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$;
в) $f(x)=1+3x-x^3$; г) $f(x)=x^4-2x^2+3$;
д) $f(x)=4x^3-3x^4$; е) $f(x)=\frac{x+3}{x-1}$;
ж) $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$; з) $f(x)=4x-\frac{x^3}{3}$;
и) $f(x)=\frac{e^x}{x}$; к) $f(x)=x+\frac{1}{x}$;
л) $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x+1}$.

33. Найдите первообразные для функций:

а) $f(x)=4x^3-1$; б) $f(x)=\frac{1}{x^3}+2\sin 3x$;
в) $f(x)=\ln(3-5x)$; г) $f(x)=x-\frac{1}{x}$;
д) $f(x)=x\sqrt{x}-\frac{3}{\sin^2 x}$; е) $f(x)=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$.

34. Вычислите интегралы:

а) $\int\limits_{-2\pi}^{-\pi}\sin x\,dx$; б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,dx$; в) $\int\limits_{-4}^{1}x^5dx$;
г) $\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x}$; д) $\int\limits_{1}^{8}\sqrt[3]{x^2}\,dx$; е) $\int\limits_{1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

35. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями (выполните рисунки):

а) $y=x^2+2$; $y=x+4$;
б) $y=-x^2+4$; $y=2-x$;
в) $y=\sqrt{x}$; $y=\frac{x}{6}+1{,}5$; $x=1$.

36. Решите уравнения:

а) $\frac{2x-1}{3}-\frac{5x+2}{12}=\frac{x-3}{4}+1$; б) $\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{37}{x^2+5x+6}$;
в) $|x+1|-2=0$; г) $|2x+3|+1=0$.

37. Решите уравнения:

а) $\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{5-x}=0$; б) $x+1=2-\sqrt{x-1}$;
в) $1-\sqrt{x-2}=x-1$; г) $\sqrt{x+7}+\sqrt{3x-2}=0$;
д) $x=8+2\sqrt{x}$; е) $x-8\sqrt{x}=9$;
ж) $\sqrt{(2x+1)(9x+5)}-2x=1$;
з) $\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}=\frac{x}{2}$.

38. Какие из следующих систем уравнений:

а) $\begin{cases}0{,}5x-1{,}2y=2{,}9,\\ x+3y=-5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2{,}4x-y=2,\\ 12x-5y=1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}6x+3y=9,\\ 2x+y=3\end{cases}$

имеют единственное решение; бесконечное множество решений; не имеют решений?

39. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases}2x+3y-5z=13,\\ x-y+2z=-3,\\ 3x+2y+7z=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x-y+2z=4,\\ 2x+3y-z=3,\\ 5x+5y=10;\end{cases}$

в) $\begin{cases}3x-y+z=3,\\ x-5y+2z=-2,\\ 4x-6y+3z=7.\end{cases}$

40. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases}\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=18,\\ x+y=12;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+3y=4,\\ 3xy=3.\end{cases}$

41. Решите неравенства:

а) $12x-4x^2-9\geqslant 0$; б) $\frac{1}{2+x}-\frac{1}{x-2}<0$;
в) $\frac{x^2+4}{x^2-7x+10}<0$; г) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-7x+10}<0$.

42. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}\frac{x-9}{4}-x<\frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3},\\ 2-x>2x-8;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{2x-11}{4}+\frac{19-2x}{2}<2x,\\ \frac{2x+15}{9}>\frac{1}{5}(x-1)+\frac{x}{3}\end{cases}$

43. На координатной плоскости изобразите множество решений неравенства:

а) $y\geqslant 2x-1$; б) $y+x^2\leqslant 3$; в) $y^2+x^2>9$.

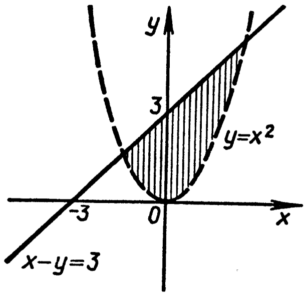


Рис. 322

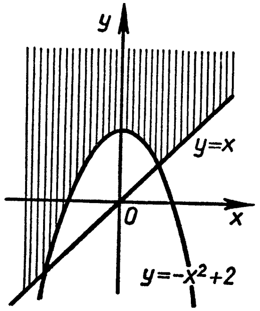


Рис. 323

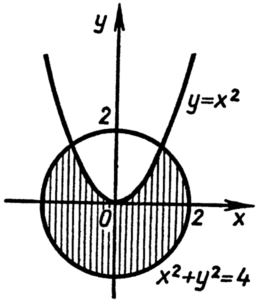


Рис. 324

44. Запишите систему неравенств, решением которой служит заштрихованная область координатной плоскости, изображенная на рисунках 322—324.

45. Выполните действия:

а) $\left(9^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}-\left(25^{\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{1}{10}}+\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{6}{7}}\right)^{0}:(36)^{-\frac{1}{2}}+(\sqrt{5})^{-1}$;

б) $\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}}b^{-1}}\cdot a^{\frac{5}{6}}\cdot b^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{a^{-1}b^{\frac{2}{3}}}$.

46. Найдите производные функций: а) $y=x^{-5}$; б) $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$; в) $h(x)=x^{\ln 2}$; г) $g(x)=x^{-e}$; д) $\varphi(x)=\sin\sqrt{2}\,x+5$.

47. Найдите первообразную функции: а) $f(x)=x^3$; б) $\varphi(x)=x^{-\frac{1}{2}}$; в) $g(x)=\frac{3}{2}x^{\sqrt{2}}$; г) $h(x)=x^{\ln 2}$.

48. Вычислите интегралы: а) $\int\limits_0^2 x^2dx$; б) $\int\limits_1^{32}\frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$; в) $\int\limits_0^1 x^{\sqrt{2}}dx$.

49. Решите неравенства: а) $2^{x-2}>4$; б) $3^{2x+3}<1$; в) $\left(\frac{3}{4}\right)^x>\left(\frac{4}{3}\right)^5$; г) $3^{x+1}+3^x<108$; д) $3^{2x}-3^x>72$.

50. Найдите производные функций: а) $f(x)=2^{x+3}$; б) $f(x)=e^{3-4x}$; в) $f(x)=3^{\sin x}$; г) $f(x)=(0{,}2)^x\sin 3x$; д) $f(x)=e^{-2x}\cdot\cos 5x$.

51. Найдите первообразные функций: а) $f(x)=2^{3x}$; б) $f(x)=\sqrt{3^{0{,}5x}}$; в) $f(x)=4e^{2x}$; г) $f(x)=\frac{10}{\sqrt{e^x}}$.

52. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=3^x,\ y=3^{-x}\ \text{и}\ x=\frac{1}{3}.$$

53. Найдите x, если:

а) $\log_3 x=\log_3 18-\frac{1}{3}\log_3 8$;

б) $\log_2 x=2\log_2 3+\frac{1}{2}\log_2 9$;

в) $\log_3 x=2\log_3 7+\frac{1}{5}\log_3 32-\frac{1}{2}\log_3 196$.

54. Решите уравнения:

а) $\lg 5x+\lg(x-1)=1$;
б) $\log_{x+1}(2x^2+1)=2$;
в) $\lg^2 x+\lg x^2=-1$;
г) $2\log_3(2x-1)=\log_3(3x+1)$;
д) $x^{4\lg x}=10$;
е) $\lg(2x-1)-2=2\lg 0{,}3$.

55. Какое заключение можно сделать относительно чисел m и n, если: а) $\log_5 m<\log_5 n$; б) $\log_{0{,}5} m>\log_{0{,}5} n$; в) $\log_{0{,}1} m<\log_{0{,}1} n$?

56. Какое заключение можно сделать относительно основания логарифма a, если:

а) $\log_a 3=-0{,}2$; б) $\log_a 5<\log_a 3$; в) $\log_a\frac{3}{4}>\log_a\frac{3}{5}$?

57. Вычислите производные функций:
а) $y=\log_2 x$; б) $f(x)=3\ln 5x$; в) $\varphi(x)=\lg(3-4x)$.

58. Вычислите интегралы: а) $\int\limits_1^2\frac{dx}{x}$; б) $\int\limits_{-1}^1\frac{dx}{3+2x}$.

59. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{x}$, $y=0$, $x=1$ и $x=e$.

60. Упростите выражения·

а) $\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\cos^2\beta}-\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta$; б) $\frac{(\sin t+\cos t)^2-1}{\operatorname{ctg} t-\sin t\cos t}$.

61. Докажите тождества:

а) $(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)+(\cos\alpha+\cos\beta)\times(\cos\alpha-\cos\beta)=0$;

б) $(1-\operatorname{ctg}\alpha)^2+(1+\operatorname{ctg}\alpha)^2=\frac{2}{\sin^2\alpha}$.

62. Какие из функций четные, а какие нечетные: а) $\sin^3 x$; б) $\cos 2x$; в) $\frac{x}{\cos x}$; г) $\sin x+\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}$?

63. Докажите тождества:

а) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos\beta}{2\sin\alpha\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)}=\operatorname{tg}(\beta-\alpha)$;

б) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}+\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}=2$.

64. Найдите производные функций:

а) $f(x)=0{,}4\sin 5x$; б) $\varphi(x)=\cos 2x+\sqrt{3}$;

в) $g(x)=\sin 3x\cdot\cos 0{,}5x$; г) $h(x)=\frac{\operatorname{tg} x}{1-\cos 4x}$.

65. Проверьте, является ли функция $y=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ решением дифференциального уравнения $y''=-4y$.

66. Решите уравнения:

а) $2\sin x-1=0$; б) $2\cos^2 x+\cos x-1=0$;

в) $\operatorname{tg}^2 x=2\operatorname{tg} x$; г) $6\sin^2 x-3\sin x\cos x-\cos^2 x=1$;

д) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$.

67. Решите уравнения:

а) $\cos x-\cos(\pi-2x)=0$; б) $\cos x-\sin(1{,}5\pi+2x)=-1$;

в) $\sin 2x-4(1+\cos 2x)=0$; г) $2\cos^2 x-3\sin x=0$;

д) $\sin^2 x=1-\sin 2x$; е) $2\cos^2 x-2\sin 2x+1=0$;

ж) $4\sin x-2\cos 2x=1$; з) $\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x=1$;

и) $5\sin^2 x+\sin 2x+\cos^2 x=4$; к) $2\cos^2 x-\sin x=1$.

68. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases}\frac{y}{1-x}=-1,\\ y+1=x^2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{y}{x+1}=1,\\ 1-x^2=y;\end{cases}$ в) $\begin{cases}\frac{x+2}{y-1}=6,\\ 2y-xy=4;\end{cases}$

г) $\begin{cases}\frac{y-2}{x+1}=\frac{1}{5},\\ xy-3x=1;\end{cases}$ д) $\begin{cases}\frac{2}{y^2}=\frac{1}{2},\\ \frac{y-2}{x}=1;\end{cases}$ е) $\begin{cases}\frac{3}{x^2}=\frac{1}{3},\\ \frac{x+3}{y}=1;\end{cases}$

ж) $\begin{cases}x^2-2xy-3y^2=0,\\ x^2-xy-2x-3y=6;\end{cases}$ з) $\begin{cases}\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{5}{6},\\ x^2-y^2=5;\end{cases}$

и) $\begin{cases}x^2-xy+y^2=21,\\ y^2-2xy+15=0;\end{cases}$ к) $\begin{cases}2y^2-4xy+3x^2=17,\\ y^2-x^2=16;\end{cases}$

л) $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=-1,\\ \sqrt{xy}=6;\end{cases}$ м) $\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{6},\\ xy=36.\end{cases}$

69. Решите уравнения:

а) $\log_2(21-\sqrt{x})-\log_2(\sqrt{x}-3)=1$;

б) $\log_2(2x+3)-\log_2 x=\log_2 x$;

в) $\log_3(x^2-8)=\log_3(x-2)$;

г) $\log_2(4-x)+\log_2(1-2x)=2\log_2 3$;

д) $x^{\lg 3x+5\lg x}=10^{12\lg^2 x}$

70. Решите уравнения:

а) $5\cdot 5^{2-4x}=25^{x+3}$; б) $3^{2+6x}=3\cdot 9^{2x-1}$;

в) $81^{\frac{1}{x}}-3^{\frac{x+2}{x}}+2=0$; г) $4^{x-2}-17\cdot 2^{x-4}+1=0$;

д) $3^{x+1}+3^x=108$; е) $x^{\lg x}=100$.

71. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases}\lg(x+y)+\lg(x-y)=1+2\lg 2,\\ 10^{1+\lg(x-y)}=40;\end{cases}$

б) $\begin{cases}10^{1+\lg(x+y)}=60,\\ \lg(x-y)+\lg(x+y)=1+\lg 3;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\log_3 x^2=2,\\ \log_3 x-\log_3 y=1.\end{cases}$

72. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases}\lg x+\lg y=4,\\ x^{\lg y}=1000;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\lg x-\lg y=4,\\ x^{\lg y}=1000;\end{cases}$

в) $\begin{cases}xy=40,\\ x^{\lg y}=4;\end{cases}$ г) $\begin{cases}3^{2x}-2^y=725,\\ 3^x-2^{\frac{y}{2}}=25.\end{cases}$

73. Решите неравенства:

а) $\cos 2x\geqslant -\frac{1}{2}$;

б) $\sin 3x\leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\cos\frac{\pi}{2}\cos x+\sin\frac{\pi}{2}\sin x\leqslant\frac{1}{2}$;

г) $\sin\pi\cos x-\cos\pi\sin x\leqslant -\frac{1}{2}$;

д) $2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1\geqslant 0$.

74. Решите неравенства:

а) $\log_4(1-4x)>-1$; б) $\log_{0,2}(15-2x)>-1$;

в) $\log_{0,5}(6+5x)<-2$; г) $\log_{16}(0{,}6+2x)>-0{,}25$;

д) $\log_2(4-3x)<-3$; е) $\frac{\log_{0,5}(5x+3)}{11+19x}\geqslant 0$;

ж) $7^{\log_7(4-9x)}<49$; з) $(0{,}4)^2>0{,}4^{\log_{0,4}(3-2x)}$;

и) $\log_x(x+2)\geqslant 2$; к) $3^{2x+5}\leqslant 3^{x+2}+2$;

л) $\log_{2x-6}(x^2-9)<2$; м) $(\log_{\frac{1}{2}} x)^2+\log_{\frac{1}{2}} x-2\leqslant 0$.

75. На координатной плоскости изобразите множество решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} y+x\geqslant 1, \\ y+x^2\leqslant 2x-2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2+6x-4y\leqslant 3, \\ y\leqslant x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y+x^2\leqslant 0, \\ y-2x+3\geqslant 0, \\ y+1\leqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x-2y+4\leqslant 0, \\ 2x+y-1\geqslant 0, \\ y\leqslant 4; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x+2y+1\leqslant 0, \\ 2x-y+4\geqslant 0, \\ y\geqslant -2. \end{cases}$

76. $ABCD$ — квадрат, длина стороны которого равна a. $[AM)$ луч с началом в точке A, пересекающий сторону DC или BC, образует с лучом $[AD)$ угол φ. Найдите выражение $S(\varphi)$ площади фигуры, отсекаемой лучом от квадрата, как функцию переменной φ.

77. Найдите наибольший объем правильной треугольной пирамиды, апофема которой равна $2\sqrt{3}$ дм.

78. Найдите наибольший объем правильной треугольной пирамиды, периметр боковой грани которой равен 6 дм.

79. Основанием призмы служит равнобедренный прямоугольный треугольник. Наибольшая диагональ боковой грани призмы равна $2\sqrt{3}$ дм. Найдите наибольший объем призмы.

80. Найдите наибольшую площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы, диагональ которой равна $\sqrt{2}$ м

81. Найдите наибольший объем правильной четырехугольной призмы, периметр диагонального сечения которой равен 6 дм.

82. Найдите длину образующей конуса наибольшего объема, если сумма длин его высоты и радиуса основания равна 3 дм.

83. В цилиндре расстояние от центра нижнего основания до точки окружности верхнего основания равно $\sqrt{2}$ м. Какова должна быть высота цилиндра, чтобы площадь его боковой поверхности была наибольшей?

84. Периметр осевого сечения конуса равен 10 м. Каков должен быть радиус основания конуса, чтобы его объем был наибольшим?

85. Периметр осевого сечения цилиндра равен 8, а длина диаметра основания может принимать любые значения, принадлежащие промежутку $[1; 3]$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, имеющего наибольшую площадь осевого сечения

СПРАВОЧНЫЙ РАЗДЕЛ

1. Обозначения, принятые в учебном пособии

$\boldsymbol{N}$ — множество всех натуральных чисел;
$\boldsymbol{Z}$ — множество всех целых чисел;
$\boldsymbol{Q}$ — множество всех рациональных чисел;
$\boldsymbol{R}$ — множество всех действительных чисел;
$\boldsymbol{R}_+$ — множество положительных действительных чисел;
$[a; b]$ — замкнутый промежуток (отрезок), $a<b$;
$]a; b[$ — открытый промежуток (интервал), $a<b$;
$]a; b]$, $[a; b[$ — полуоткрытые промежутки, $a<b$;
$]-\infty; +\infty[$ — числовая прямая (множество всех действительных чисел);
$[a; \infty[$; $]a; \infty[$;
$]-\infty; a]$; $]-\infty; a[$ — числовые лучи (полупрямые);
Ox — ось абсцисс;
Oy — ось ординат;
$(a; b)$ — упорядоченная пара чисел; координаты точки, принадлежащей координатной плоскости;
$M(x; y)$ — точка M с координатами x и y;
$\{a; b; c; \ldots\}$ — множество, состоящее из элементов a; b; c; ... ;
$\varnothing$ — пустое множество;
$\in$ — знак принадлежности элемента множеству;
$n\in\boldsymbol{N}$ — число n принадлежит множеству натуральных чисел $\boldsymbol{N}$;
$\notin$ — знак непринадлежности элемента множеству;
$a\notin\boldsymbol{N}$ — число a не принадлежит множеству натуральных чисел $\boldsymbol{N}$;
$\subset$ — знак включения подмножества в данное множество;
$\boldsymbol{N}\subset\boldsymbol{Z}$ — множество натуральных чисел есть подмножество множества целых чисел;
$\cap$ — знак пересечения множеств;
$\cup$ — знак объединения множеств;
$f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ и т. д. — обозначения функции;

$f(x_0)$ — значение функции $f(x)$ в точке x_0;
$D(f(x))$ — область определения функции $f(x)$;
$E(f(x))$ — множество значений функции $f(x)$;
$[x]$ — целая часть числа x;
$\{x\}$ — дробная часть числа x;
$|x|$ — модуль (абсолютная величина) числа x;
(x_n), (y_n), (z_n) — бесконечные последовательности;
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ — число a есть предел последовательности;
$x \to a$ — переменная x стремится к числу a;
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ — число b есть предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к a;
Δx — приращение аргумента;
$\Delta f(x)$ — приращение функции;
$f'(x)$ — производная функция от функции $f(x)$;
$f'(x_0)$ — значение производной функции $f(x)$ в точке x_0;
e — основание натуральных логарифмов; $e = 2{,}71828\ldots$; $(e^x)' = e^x$;
π — отношение длины окружности к ее диаметру; $\pi = 3{,}14159\ldots$;
$\ln x$ — логарифмическая функция с основанием e;
$\int\limits_a^b f(x)\,dx$ — интеграл функции $f(x)$ в пределах от a до b;
$]a - \varepsilon;\ a + \varepsilon[$ — ε-окрестность точки a;
$\vec{a}$; $\overrightarrow{AB}$ — обозначения вектора.

2 Законы арифметических действий

Переместительный: $a + b = b + a$ (сложения); $ab = ba$ (умножения),

Сочетательный: $a + (b + c) = (a + b) + c$ (сложения); $a(bc) = (ab)c$ (умножения).

Распределительный закон умножения относительно сложения:

$$a(b + c) = ab + bc.$$

3. Тождества сокращенного умножения

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ — разность квадратов;
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ — сумма кубов;
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ — разность кубов;
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ — квадрат двучлена;
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ — куб двучлена.

4. Линейное уравнение с одной переменной $ax = b$

а) $a \neq 0$, $x = \frac{b}{a}$;
б) $a = 0$, $b \neq 0$, решений нет.
в) $a = 0$, $b = 0$, x — любое действительное число.

5. Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

$D = b^2 - 4ac > 0$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;
$D = b^2 - 4ac = 0$, $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$,
$D = b^2 - 4ac < 0$, действительных решений нет.

Теорема Виета:

если $D \geqslant 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

6. Разложение квадратного трехчлена на множители

$$(D = b^2 - 4ac \geqslant 0);$$
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

7. Система двух линейных уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1b_1 \\ a_2b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1b_1 \\ c_2b_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1c_1 \\ a_2c_2 \end{vmatrix}.$$

а) $\Delta \neq 0$, $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$;
б) $\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta = 0$, $\Delta_y \neq 0$, решений нет;
в) $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, бесконечное множество решений.

8. Степени

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}, \ n \in \boldsymbol{N},\ n \neq 1;$$

$a^1 = a$;
$a^0 = 1$, $a \neq 0$;
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$, $n \in \boldsymbol{N}$;

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a > 0$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Свойства степеней:

$a^m a^n = a^{m+n}$;
$a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$;
$(a^m)^n = a^{mn}$;
$(ab)^n = a^n b^n$;
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

9. Логарифмы

$a^{\log_a b} = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$;
$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$;

$\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1;$

$\log_c a^k = k \log_c a,\ a > 0,\ c > 0,\ c \neq 1;$

$\log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_c a,\ a > 0,\ n \in \boldsymbol{N},\ c > 0,\ c \neq 1;$

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ a \neq 1,\ c \neq 1.$

10. Геометрическая прогрессия

$$(b_1;\ b_2;\ b_3;\ \ldots;\ b_n),\ n \in \boldsymbol{N}.$$
$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1},\ b_1 \neq 0,\ q \neq 0.$$
$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1};\ S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1};\ q \neq 1.$$

11. Арифметическая прогрессия

$$(a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_n),\ n \in \boldsymbol{N}.$$
$$a_n = a_1 + d(n - 1).$$
$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,\ S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n.$$

12. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

$(b_1;\ b_1 q;\ b_1 q^2;\ b_1 q^3;\ \ldots;\ b_1 q^{n-1};\ \ldots),\ n \in \boldsymbol{N},\ |q| < 1,\ b_1 \neq 0.$

$$b_n = b_1 q^{n-1};\ S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

13. Степенная функция $f(x) = x^\alpha$.

а) $\alpha \in \boldsymbol{N}$; $D(f) =]-\infty;\ \infty[$;

б) α — целое отрицательное число либо $\alpha = 0$;

$$D(f) =]-\infty;\ 0[\ \cup\ ]0;\ +\infty[;$$

в) α — положительная несократимая дробь либо положительное иррациональное число;

$$D(f) = [0;\ \infty[;$$

г) α — отрицательная несократимая дробь либо иррациональное отрицательное число;

$$D(f) =]0;\ \infty[.$$

14. Показательная функция $f(x) = a^x,\ a > 0,\ D(f) = \boldsymbol{R}$.

15. Логарифмическая функция $f(x) = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1,\ D(f) =]0;\ \infty[$.

16. Длина C окружности радиуса R (диаметра D).

$$C = 2\pi R;\ C = \pi D.$$

17. Длина l дуги окружности в α радиан.

$$l = \alpha R\ (R \text{ — радиус дуги}).$$

18. Площадь S круга радиуса R (диаметра D).

$$S = \pi R^2;\ S = \frac{\pi D^2}{4}$$

19. Площадь S сектора, дуга которого равна α радиан.

$$S = \frac{\alpha R^2}{2}\ (R \text{ — радиус дуги}).$$

20. Область определения и множество значений тригонометрических функций:

	Функция			
	sin x	cos x	tg x	ctg x
$D(f)$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$	$x \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$
$E(f)$	$[-1;\ 1]$	$[-1;\ 1]$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$

21. Знаки значений тригонометрических функций:

Четверть	Функция			
	sin x	cos x	tg x	ctg x
I	+	+	+	+
II	+	−	−	−
III	−	−	+	+
IV	−	+	−	−

22. Значения тригонометрических функций при некоторых значениях аргумента:

Функция	Аргумент							
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
ctg α	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—	0	—

23. Простейшие тригонометрические уравнения:

Уравнение	Формула решения	Примечание
$\sin x = a$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$	$\arcsin(-a) = -\arcsin a,$ $\lvert a\rvert \leqslant 1,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$\cos x = a$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n$	$\arccos(-a) = \pi - \arccos a,$ $\lvert a\rvert \leqslant 1,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$\mathrm{tg}\, x = a$	$x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n$	$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\, a,$ $a \in \boldsymbol{R},\ n \in \boldsymbol{Z}$
$\mathrm{ctg}\, x = a$	$x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n$	$\mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\, a,$ $a \in \boldsymbol{R},\ n \in \boldsymbol{Z}$

24. Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\ \alpha \in \boldsymbol{R};$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha},\ \alpha \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1,\ \alpha \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha},\ \alpha \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

25. Формулы сложения для тригонометрических функций:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta;$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta;$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta;$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,$$
$$\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,$$
$$\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

26. Формулы приведения:

Функция	Аргумент						
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

27. Тригонометрические функции двойного аргумента:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$
$$\mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n,\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

28. Тригонометрические функции половинного аргумента:

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}};\ \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}};$$
$$\left|\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}};\ \left|\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}};$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha};\ \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha};$$
$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha};\ \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

29. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента:

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}},\ x \neq \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\cos x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}},\ x \neq \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}},\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x \neq \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\mathrm{ctg}\, x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}},\ x \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

30. Формулы суммы и разности синусов и косинусов:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

31. Формулы понижения степени тригонометрических функций:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2};\quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

32. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta));$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)).$$

33. Формулы дифференцирования функций:

Функция	Производная
$y = c$	$c' = 0$
$y = x$	$x' = 1$
$y = x^\alpha,\ \alpha \neq 1$	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
$y = \sin x$	$(\sin x)' = \cos x$
$y = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{ctg} x$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$y = a^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$y = e^x$	$(e^x)' = e^x$
$y = \ln x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$y = \log_a x$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$

Функция	Производная
$y = c\cdot u,\ c = \text{const}$	$(c\cdot u)' = c\cdot u'$
$y = u \pm v$	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
$y = u\cdot v$	$(uv)' = u'v + uv'$
$y = \frac{u}{v},\ v \neq 0$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
$y = f(\varphi(x))$	$(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$

34. Первообразные:

Функция	Первообразная
$y = x^\alpha,\ \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$y = k,\ k = \text{const}$	$kx + C$
$y = \sin x$	$-\cos x + C$
$y = \cos x$	$\sin x + C$
$y = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$y = \frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$y = \frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$y = e^x$	$e^x + C$
$y = a^x$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

Глава I

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1

3. а) Нет; б) да; в) да. **4.** а) Нет; б) нет; в) да. **5.** а) 0,85; б) — 0,32; в) 2, (36); г) 5,45. **6.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{23}{90}$; в) $-7\frac{4}{11}$; г) $7\frac{223}{990}$. **7.** а) $\frac{2}{3}$; б) $10\frac{46}{99}$; в) 10; г) 2,4. **8.** а) Сложение, умножение; б) сложение, умножение, вычитание; в) сложение, умножение, вычитание, деление (кроме деления на нуль).

§ 2

3. $\frac{7}{41}$; 7; 0; 4; 0,(8); 5,7(3) — рациональные числа; $\sqrt{7}$; $-\sqrt{2}$; 2,131131113111113... — иррациональные числа. **5.** Решение. Предположим, что $\sqrt{3}$ — рациональное число, т. е. $\sqrt{3}=\frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Тогда $3=\frac{p^2}{q^2}$ или $3q^2=p^2$. Число $3q^2$ кратно трем, значит, p^2 кратно трем, что возможно, если $p=3n$, но тогда $3q^2=(3n)^2$, $q^2=3n^2$, т. е. $q=3m$. Дробь $\frac{p}{q}$ сократима на три, это противоречит предположению, $\sqrt{3}$ не есть рациональное число. **8.** 0,(6).

§ 3

2. а) 3,21; 3,22; б) 0,66; 0,67; в) 2,64; 2,65; г) 7,85; 7,86; д) —2,16; —2,15. **6.** а) $x+y\approx 3{,}94$; $x\cdot y\approx 1{,}52$. **7.** $\sqrt{3}+\sqrt{5}\approx 3{,}96$; $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\approx 3{,}87$. **9.** а) Нет; б) нет; в) да.

§ 4

1. $|AC|=9$, $|AB|=12$, $|BC|=3$. **2.** а) $]5;\ \infty[$; б) $]-\infty;\ 3[$; в) $]-\infty;\ -7]$; г) $[0;\ \infty[$; д) $]-3;\ 7]$; е) $[0;\ 4]$; ж) $]-2;\ 4[$. **3.** а) $]7;\ \infty[$; б) $[-3;\ 0]$; в) $[0;\ 4]$; г) $[7;\ 8[$; д) $]0;\ 5[$; е) $\varnothing$. **4.** а) $]-7;\ 4[$; б) $]-2;\ \infty[$; в) $[-8;\ 15]$; г) $]-\infty;\ \infty[$; д) $]-3;\ 0[\ \cup\ [5;\ \infty[$; е) $]-\infty;\ 0[\ \cup\ ]0;\ \infty[$. **5.** а) $[3;\ \infty[$; б) $]-5;\ \infty[$; в) $[-1;\ \infty[$. **6.** а) $]3;\ 6[$; б) $]-4;\ \infty[$. **7.** а) $]-7;\ 7[$; б) $]-\infty;\ -7]\cup[7;\ \infty[$; в) $]-7;\ 3[$; г) $]-\infty;\ -3]\cup[13;\ \infty[$; д) $]-\infty;\ 0]$. **8.** $[3;\ \infty[$.

§ 5

1. а) $-\frac{16}{9}$; б) —200. **2.** а) 1; б) —0,5. **3.** $\frac{1}{25}$. **5.** а) $]-\infty;\ 0[\cup]0;\ \infty[$; б) $]-\infty;\ -6[\cup]-6;\ 0[\cup]0;\ \infty[$; в) $]-\infty;\ \infty[$; г) $[2;\ \infty[$. **6.** а) 7; б) 16; в) 19; г) $5k^2+6k+8$. **7.** (3; 9) и (4; 16). **9.** а) 10,4; б) 2; в) нет решений. **10.** а) Нет решений; б) любая пара чисел $(x;\ x-1)$, где $x\in \boldsymbol{R}$; в) (2; —3). **11.** а) 0; 0,8; б) $-\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$; в) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$; г) нет решений. **15.** а) $x>-2{,}5$; б) $x>-1$; в) $x\leqslant 3$; г) $x\leqslant\frac{4}{3}$ **16.** а) Нет решений; б) $\frac{4}{3}<x\leqslant 2$; в) $-1\leqslant x<-\frac{1}{3}$; г) нет решений. **17.** а) $x<-1{,}5$; б) $x<1$; в) $-1<x<3$; г) $-5<x<0{,}5$. **18.** а) $x<-\sqrt{3}$, $x>\sqrt{3}$; б) $-1<x<1$; в) $0<x<2$; г) $x<-3$, $x>-3$; д) $-1<x<3$; е) $x<-4$, $x>3$; ж) $x\neq 3$; з) нет решений. **20.** а) 3,9000...; б) —2,15000...; в) 2,428571428571...; г) 0,55000...; д) 0,323232...; е) 2,7555... . **23.** а) $\boldsymbol{N}$; б) $\boldsymbol{Q}$; в) $\boldsymbol{Z}$; г) $\boldsymbol{R}$; д) $\boldsymbol{N}$. **25.** а) С недостатком: —3,8; —3,74; с избытком: —3,7; —3,72. **26.** $\approx 3{,}08$; $\approx 2{,}35$. **27.** а) $[-1;\ 7]$, $]2;\ 5]$; б) $[-3,\ 3]$, $\varnothing$; в) $]-\infty;\ \infty[$, $[5;\ 7]$. **28.** $y<0$ при $x>2$; $y>7$ при $x<-1{,}5$; $|y|\leqslant 3$ при $0{,}5\leqslant x\leqslant 3{,}5$. **29.** $0{,}5\leqslant x<1$, $x>1$. **30.** $\{-4;\ 4\}$.

§ 6

1. 2. **2.** 9. **3.** $\approx 2{,}70$; $\approx 1{,}59$. **6.** а) $\frac{11}{3}$; б) 1; 5,5. **7.** (3; —1). **8.** а) $x<-2$, $x>2$; б) $1<x<2$. **9.** $4<x<10$. **10.** $1<x<2$.

Глава II

БЕСКОНЕЧНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ ПРЕДЕЛЫ

§ 7

3. $4\frac{1}{6}$. **4.** а) (1; 4; 7; 10; 13; ...), б) (0; —2; —2; 0; 4; ...); в) $\left(\frac{1}{5};\ \frac{3}{8};\ \frac{5}{11},\ \frac{1}{2},\ \frac{9}{17};\ \ldots\right)$; г) (0; 1; 0; 1, 0,...) д) $\left(1\frac{1}{2};\ 1\frac{1}{4};\ 1\frac{1}{8};\ 1\frac{1}{16};\ 1\frac{1}{32};\ \ldots\right)$. **5.** $u_1=\frac{1}{4}$; $u_5=\frac{1}{8}$; $u_{12}=\frac{1}{15}$. **6.** $b_7=\frac{1}{2}$; $b_{12}=\frac{23}{41}$; $b_{k+1}-b_k=\frac{13}{(3k+8)(3k+5)}$; $\frac{b_{k+1}}{b_k}=\frac{(2k+1)(3k+5)}{(3k+8)(2k-1)}$. **7.** а) Да, $a_{12}=29$; б) нет; в) нет. **8.** а) Да, $x_3=x_4=-12$; б) да, $x_7=0$; в) нет. **9.** 12. **10.** 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10. **11.** а) (3; 7; 13; 27; 53; ...); б) $\left(-2;\ -\frac{1}{2};\ -2;\ -\frac{1}{2};\ -2;\ \ldots\right)$; в) $\left(1;\ -5;\ -\frac{1}{5};\ 25;\ -\frac{1}{125};\ \ldots\right)$; г) (3; 3; 3; 3; 3; ...) **13.** а) 1, 1,7; 1,73; 1,732; б) 2; 2,4; 2,44; 2,449; в) 3; 3,4; 3,46; 3,464.

§ 8

3. а) $|a_{10}-7|<1$; б) $|x_{20}-7|<0{,}01$; в) $|b_n-7|<0{,}001$. **4.** Указание. $\left|\frac{3n+1}{n}-3\right|=\frac{1}{n}$, тогда для указанных членов последовательности искомые расстояния соответственно равны: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{80}$, $\frac{1}{200}$, $\frac{1}{n}$. **5.** а) 31; б) 3001. **8.** Нет. **9.** Да. **10.** а) $n\leqslant 27$, $n\in\boldsymbol{N}$; б) $n\leqslant 2998$, $n\in\boldsymbol{N}$. **12.** в) 1. **13.** Да. **14.** Да.

§ 9

3. Нет. **5.** а) Верно; б) верно. **6.** Да. **8.** а) 1; б) 0; в) —2. **9.** а) —3; б) —5; в) 0; г) $\frac{1}{2}$; д) 2; е) $\frac{4}{3}$. **10.** а) $2\frac{1}{6}$; б) 0; в) $-\frac{5}{21}$.

§ 10

3. а) 0; б) 0; в) 0. **4.** а) 4; б) 2,25; в) $\frac{3\sqrt{3}+5}{2}$; г) $\frac{1}{x-1}$. **5.** а) 13,5;

б) $\frac{16}{21}$; в) $13\frac{8}{9}$; г) $-2{,}25$. **6.** 6; 3; $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{4}$; ... . **7.** а) $4\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)a$; б) $2a^2$. **8.** а) $6a$; б) $\frac{a^2}{\sqrt{3}}$. **9.** а) $\frac{6}{11}$; б) $12\frac{1}{3}$; в) $-2\frac{109}{150}$; г) $-3\frac{63}{110}$. **10.** а) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$; б) $-\frac{7}{9}$, $\frac{1}{2}$. **11.** Указание. Из условия $|1+x|>1$ вначале установите область определения данной функции.

§ 11

1. а) Возрастает и ограничена; б) убывает и ограничена. **2.** а) $2R\sin\frac{180^\circ}{n}$; б) $2R\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$. **4.** а) Увеличится в 3 раза; б) увеличится в 3 раза; в) уменьшится в 2 раза. **5.** 0,5. **6.** $\approx 10{,}99$ км. **7.** $\approx 1{,}32$ м. **8.** а) $\approx 0{,}523$ м; б) $\approx 0{,}785$ м; в) $\approx 1{,}04$ м; г) $\approx 1{,}57$ м. **9.** 3,142.

§ 12

1. $y_3=\frac{5}{3}$; $y_{11}=\frac{13}{19}$; $y_{k+1}=\frac{k+3}{2k-1}$. **2.** а) $(-1; -\frac{1}{2}; -1; -\frac{1}{2}; -1; ...)$; б) $(2; 3; 9; 18; 45; ...)$. **3.** а) Да, $a_{100}=298$; б) да, $a_{1631}=4891$; в) нет; г) да, $a_{8284}=24850$. **4.** $n\leqslant 13$, $n\in \boldsymbol{N}$. **5.** а) $z_n=(-1)^n\cdot 8$; б) $z_n=(-1)^{n+1}\cdot 5$. **6.** Указание. а) Вычислите $a_{n+1}-a_n$; б) вычислите $\frac{b_{n+1}}{b_n}$. **7.** 0; 1. **8.** а) 0; б) 2; в) не имеет предела; г) не имеет предела. **9.** а) Последовательность (f_n) возрастает, ограничена, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n=R$; б) последовательность (α_n) убывает, ограничена, $0^\circ<\alpha_n<120^\circ$ при $n\geqslant 3$, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$; в) последовательность (β_n) возрастает, ограничена, $\frac{\pi}{3}\leqslant\beta_n<\pi$ при $n\geqslant 3$, $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=\pi$. **10.** а) 100; 101; 110; 111; в) 100; 110; 111; 101. **14.** а) $n>10$; б) $n>1000$. **15.** $n\geqslant 151$. **16.** Нет. **19.** Неверно. Например, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\sqrt{2}$, где $(\alpha_n)=(1; 1{,}4; 1{,}41; 1{,}414; ...)$. **23.** Да. **24.** а) $\frac{3}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) 0; г) не существует; д) 0; е) 1; ж) $\frac{2}{3}$. **25.** $\frac{1276}{12321}$. **26.** $-1<x<1$. **27.** 20. **28.** 16. **32.** $2\pi R^2$, $4R^2$.

§ 13

1. $(1; 2\frac{1}{2}; 1\frac{2}{3}; 2\frac{1}{4}; 1\frac{4}{5}; ...)$. **5.** а) 6; б) 3; в) 0. **6.** 4,5. **7.** 20. **8.** $4\frac{7}{9}$; $\frac{61}{495}$. **9.** $\frac{2\pi a}{\sqrt{3}}$.

Глава III

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНАЯ

§ 15

2. а) Функции, изображенные на рисунках 33 и 34, в точке $x=1$ разрывны, а функция, изображенная на рисунке 35, в точке $x=1$ непрерывна; б) при $x\to 1$ функция, изображенная на рисунке 33, не имеет предела, а функции, изображенные на рисунках 34 и 35, имеют предел, равный 2. **4.** а) Да; б) нет. **5.** В точке $x=0$ непрерывна функция, график которой представлен на рисунке 36, а остальные функции в точке $x=0$ разрывны. **7.** Может.

§ 16

2. а) 1; б) -19; в) -1; г) 0. **3.** Нет. **4.** а) 0 и 4; б) -4; в) -1. **5.** Решение. Предположим противное: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$, $b\neq c$. Пусть $\varepsilon>0$, тогда найдется $\delta>0$, такое, что для всех $x\neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$, выполняются неравенства $|f(x)-b|<\frac{\varepsilon}{2}$ и $|f(x)-c|<\frac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим модуль разности: $|b-c|=|b+f(x)-f(x)-c|=$ $=|(b-f(x))+(f(x)-c)|\leqslant|f(x)-b|+|f(x)-c|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Получили, что неотрицательное число $|b-c|$ меньше любого положительного числа. Поэтому $|b-c|=0$, откуда $b-c=0$ и $b=c$.

§ 17

2. а) 8; б) 2; в) -16; г) 9.

§ 18

2. а) $\boldsymbol{R}$; б) $]-\infty; -3[\cup]-3; \infty[$; в) $]-\infty; -1[\cup]-1; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; \infty[$; г) $]-\infty; -3[\cup]-3; 2[\cup]2; \infty[$. **5.** а) 11; б) -3; в) -2; г) 8; д) $\frac{1}{2}$; е) $\frac{7}{10}$; ж) 27; з) $\frac{7}{6}$; и) $\frac{1}{2}$.

§ 19

4. а) -3; б) 0,5. **5.** а) $3\Delta x$; б) $\Delta x(\Delta x+2x-5)$; в) $-\frac{\Delta x}{(x+2)(x+2+\Delta x)}$; г) $3(\sqrt{x-4+\Delta x}-\sqrt{x-4})$. **6.** На рисунке 44 $\Delta x>0$, $\Delta f>0$; на рисунке 45 $\Delta x<0$, $\Delta y>0$; на рисунке 46 $\Delta x<0$, $\Delta h<0$. **7.** а) $3x+3\cdot\Delta x+5$, $3\Delta x$, 3; б) $-2(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2)$, $-2\Delta x(2x+\Delta x)$, $-2(2x+\Delta x)$. **12.** Решение. $S=\frac{\pi}{4}D^2$ — формула площади круга, имеющего диаметр D. Тогда:

1) $f(D)=\frac{\pi}{4}D^2$;

2) $f(D+\Delta D)=\frac{\pi}{4}(D+\Delta D)^2=\frac{\pi}{4}(D^2+2D\Delta D+(\Delta D)^2)$;

3) $\Delta S=f(D+\Delta D)-f(D)=\frac{\pi}{4}(2D\Delta D+(\Delta D)^2)$.

По условию $\Delta D=\pm 0{,}01D$, значит, $\Delta S=\frac{\pi}{4}(2D(\pm 0{,}01D)+(\pm 0{,}01D)^2)\approx$ $\approx\pm\frac{\pi}{4}\cdot 2D\cdot 0{,}01D=\pm 0{,}02S$. Таким образом, ΔS составляет около 2% от величины S. **13.** Указание. См. решение задачи 12. **14.** а) Убывает $]-\infty; 1]$, возрастает $[1; \infty[$; б) убывает $]-\infty; 0]$, возрастает $[0; \infty[$.

§ 20

2. 50 км/ч. **4.** 51 м/с. **5.** v_0+at, v_0+2a. **6.** $6t-2{,}34$. **7.** $1{,}2t+4{,}10$. **8.** а) -3; б) $6x+3\Delta x$. **9.** а) 2; б) -4; в) 27; г) -4.

§ 21

2. а) 3; б) 16; в) -37; г) $-\frac{1}{81}$; д) $6a+b$; е) $-\frac{1}{2}$; ж) $\frac{1}{2}$; з) $\frac{5}{4}$.

§ 23

2. а) Да; б) нет, рассмотрите, например, функцию $f(x) = [x] + \{x\}$. 4. а) 1; б) $2x$; в) $2x + 6$; г) $5x^4 - 14x$; д) $2x - \frac{1}{x^2} - 4$; е) $\frac{14}{3}(x + 2)$; ж) $12x + 7$; з) $\frac{1}{3}(70x + 11)$; и) $\frac{1}{3}(6x^2 + 62x + 9)$. 5. а) $\frac{46}{(t + 3)^2}$, 11,5, 2,875; б) $\frac{-15}{(7 + 8t)^2}$, -15, $-\frac{1}{15}$; в) $\frac{4t}{(t^2 + 1)^2}$, -1, 1; г) $\frac{at\,(bt + 2c)}{(bt + c)^2}$, $\frac{a\,(b - 2c)}{(c - b)^2}$, $\frac{a\,(b + 2c)}{(b + c)^2}$, д) $\frac{11}{5}t\sqrt[5]{t}$, $\frac{11}{5}$, $\frac{11}{5}$; е) $-\frac{t + 1}{(t - 1)^2\sqrt{t}}$; $f(-1)$ и $f(1)$ не существуют

§ 24

2. а) $[-3; 3]$; б) $]-\infty; 3[$, $]4; \infty[$; в) $]1{,}6; \infty[$; г) $\left[-\frac{3}{7}; 1\right]$. 3. а) $2\sqrt{x - 5} + 3$; б) $2\lg x - 4x + 3$; в) $\sqrt{\lg x - 2x - 5}$; г) $\lg\sqrt{x - 5} - 2\sqrt{x - 5}$. 4. а) -75×2^{50}, $150 \cdot 2^{98}$; б) $-70 \cdot 5^9$, $70 \cdot 9^9$; в) 0; 5488; г) 0, $-352 \cdot 25^{10}$; д) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$, -1; е) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{5\sqrt{7}}{14}$; ж) $-\frac{6}{625}$, $-\frac{2}{2187}$; з) 0, $-\frac{1}{36}$; и) $-\frac{1}{9}$, $\frac{1}{5\sqrt{5}}$, к) $-\frac{5^6 \cdot 97}{4}$, $-\frac{277}{2\sqrt{10}}$.

§ 25

2. а) Рис. 325; б) рис. 326; в) рис. 327. 4. а) 0, 0, не существует, 2, 2; б) -1, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, не существует. 5. а) $\frac{1}{5}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{56}$; д) $-\frac{1}{24}$; е) $-\frac{3}{2}$; ж) $\frac{1}{6}$. 6. а) -2; б) 3. 7. а) 0; 1; б) 0; -1. 8. а) $32\,(2x - 1)^{15}$, 32; б) $45\,(3x + 2)^{14}$, 45. 9. а) $\frac{2}{(2x - 3)^2}$; б) $-\frac{6}{x^3} + \frac{3}{2}\sqrt{x}$. 10. $5u^4 - 16u^3 + 9u^2 - 4u + 1$; 253; 35 1; -5. 12. $2t^3 + \frac{9}{4}t^2 - \frac{4}{7}t + 0{,}2$; 0,2; $\frac{10183}{140}$, $\frac{407}{560}$ 14. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$

15. а) $-\frac{7}{3} < x < 1$; б) $-4 \leqslant x \leqslant -3$. 16. а) $\frac{7}{2}\sqrt{x^5}$, б) $7 - 10x$; в) $3u^2 - \frac{13}{6}u + \frac{3}{8}$, г) $\frac{-3}{(3t - 5)^2}$; д) $\frac{19}{(7 - t)^2}$,

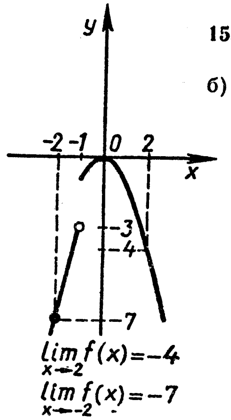


Рис. 325

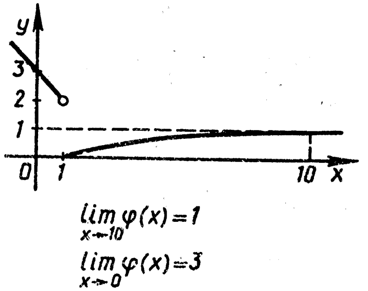


Рис. 326

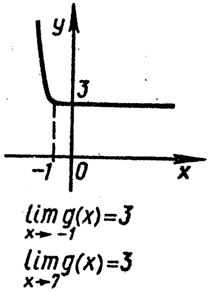


Рис. 327

е) $\frac{5 + 2x}{2\sqrt{5x + 8 + x^2}}$; ж) $-\frac{25x^2 - 92x + 22}{(x^2 - 7x + 12)^2}$. 17. а) $f'(1) > 0$; б) $f'(1) > 0$. 18. $f'(3) \cdot \varphi'(3) > 0$. 19. а) $10\,(x + 3)^9$; б) $10\,(2x - 1)^4$; в) $4\,(x^2 + x)^3\,(2x + 1)$; г) $3t\,(t^3 + 5t^2 - 8)^2(3t + 10)$. 20. $\frac{3x^2 + 2x - 5}{2\sqrt{x^3 + x^2 - 5x + 7}}$. 21. 15. 22. $\frac{36}{37\sqrt{1147}}$. 23. а) $\frac{3(1 + x)^2(1 - 2x - x^2)}{(x^2 - x)^4}$. б) $\frac{39}{2(5 + u)^2}\sqrt{\frac{2u - 3}{5 + u}}$; в) $-\frac{4t + 1}{2\sqrt{((2t - 7)(4 + t))^3}}$.

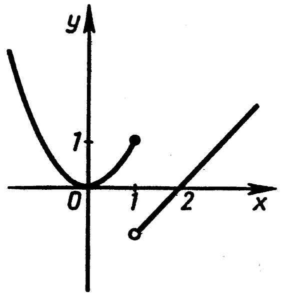


Рис. 328

§ 26

1. $]-3; 0]$. 4. а) -1; б) $\frac{1}{4}$. 5. $-1{,}32$. 6. Рис. 328, $f(-1) = f(1) = 1$, $f(3) = 1$ 7. 2. 8. а) $-4x + 3$; б) $4\,(9x^2 + 3x - 1)$; в) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$; г) $-\frac{11}{(x + 4)^2}$; д) $12x\,(3x^4 - 2x^2 + 1)^2(3x^2 - 1)$.

Глава IV
ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

§ 27

3. а) $2\Delta x$; б) $(7 - 6x)\,\Delta x$; в) $\left(\frac{3}{2\sqrt{3x}} - \frac{2}{x^3}\right)\Delta x$. 5. $\approx 39{,}58$; $\approx 37{,}84$. 7. а) $\approx 1{,}002$; б) $\approx 3{,}0007$; в) $\approx 5{,}08$; г) $\approx 2{,}8241$; д) $\approx 1{,}9375$.

§ 28

4. а) Имеет; б) не имеет; в) имеет. 8. -6. 9. $(-1; -1)$, $(1; 1)$. 10. а) 0; б) $-\frac{\pi}{4}$. 11. $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$. 12. а) 45°; б) 0°; в) arctg 4.

§ 29

1. а) $y = -12x - 14$; б) $y = -2$; в) $y = 6x - 5$. 2. а) $y = 4x - 6$; б) $y = 4x - 7$; в) $y = 40x - 87$. 3. $(1{,}5; 5{,}25)$. 4. $(-1; 11)$, $(3; -21)$. 6. $(1; -1)$, $(1; 0)$. 7. $y = 12x + 16$ и $y = 12x - 16$.

§ 30

3. $0{,}6x^2 - \frac{2}{3}x$. 4. а) $(4t - 6)\frac{\text{м}}{\text{с}}$; б) 2 м/с; в) 4 м/с². 5. а) 18 м/с²; б) $-\frac{1}{16\sqrt{2}}\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. 6. $3x^2$. 7. $12x$. 8. 12 м/с². 9. Решение. Так как $s(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, то $v(t) = v_0 - gt$, $a(t) = -g$; через $\frac{v_0}{g}$ секунд после начала дви-

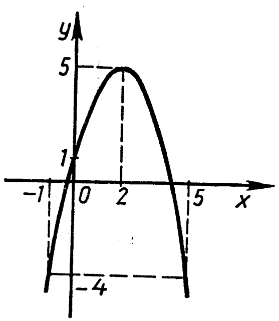


Рис. 329

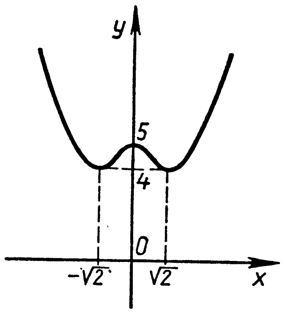


Рис. 330

жения снаряд достигнет наивысшей точки, наибольшее удаление от поверхности земли $\frac{v_0^2}{2g}$ (в м). **10.** ≈ 40 м/с. **11.** $24\frac{\text{кгм}}{\text{с}^2}$. **12.** 5250 Н. **13.** а) $4x(5x^2+3)$; б) $-\frac{1}{4\sqrt{(x-8)^3}}$; в) $\frac{2}{x^3}$; г) $2a$.

§ 31

7. а) $]-\infty; -3[\cup]-3; \infty[$; б) $]-\infty; -7[\cup]-7; 2[\cup]2; \infty[$; в) $[-3; \infty[$; г) $]1; \infty[$; д) $]-\infty; \frac{2}{3}]\cup[1; \infty[$. **12.** а) Возрастает на всей числовой прямой; б) убывает на всей числовой прямой; в) возрастает при $x \geqslant -\frac{1}{2}$, убывает при $x \leqslant -\frac{1}{2}$; г) возрастает при $x \leqslant -2$ и $x \geqslant 2$, убывает при $-2 \leqslant x \leqslant 2$; д) возрастает при $x \leqslant \frac{1}{3}$ и $x \geqslant 1$, убывает при $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1$; е) возрастает при $x \geqslant 1$, убывает при $x \leqslant 0$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$; ж) возрастает при $-1 \leqslant x \leqslant 0$ и $x \geqslant 1$, убывает при $x \leqslant -1$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$; з) убывает в каждом интервале, не содержащем точку $x = 1$; и) возрастает при $x \geqslant \frac{1}{2}$, убывает при $x < 0$ и $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$, к) возрастает при $x \geqslant 0$; л) возрастает при $x \leqslant \frac{2}{3}$ и $x \geqslant 1$, убывает при $\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1$.

§ 32

6. Да. **10.** а) Да; б) нет. **11.** а) Да; б) нет; в) нет; г) нет. **15.** Таблица верно отражает свойства функции.

16.

x	$]-\infty; -1[$	-1	$]-1; 0[$	0	$]0; 1[$	1	$]1; \infty[$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	↗	3	↘	2	↗	3	↘
		max		min		max	

18. а) Функция не имеет экстремумов; б) $\varphi_{\min} = \varphi(5) = -12{,}5$; в) $g_{\max} = g(-0{,}5) = -2$, $g_{\min} = g(0{,}5) = 2$; г) $u_{\max} = u(-2) = 13$, $u_{\min} = u(0) = -3$;

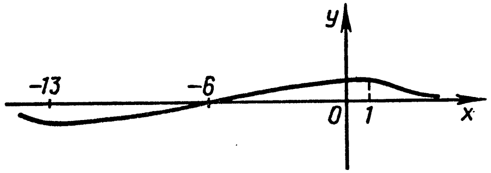


Рис. 331

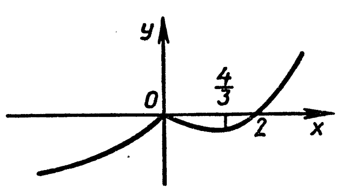


Рис. 332

д) $\psi_{\max} = \psi(0) = 0$, $\psi_{\min} = \psi(1) = -1$; е) $v_{\min} = v(2) = 0$. **19.** Указание. Исследуйте на экстремум функцию и проанализируйте результаты. **20.** а) См. рис. 329; б) см. рис. 330; в) см. рис. 331; г) см. рис. 332.

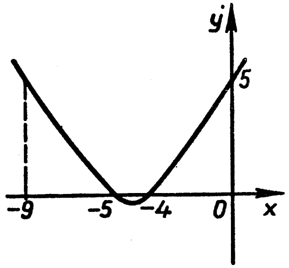


Рис. 333

§ 33

1. На рис. 91 $a < 0$; $D > 0$; $x_1 < 0$ и $x_2 > 0$; $y > 0$ при $x_1 < x < x_2$ и $y < 0$ при $x < x_1$ и $x > x_2$; $y_{\max} = f(x_0) = y_0$. На рис. 92 $a > 0$; $D < 0$; действительных корней у функции нет; $y > 0$ при $-\infty < x < \infty$; $y_{\min} = f(x_0) = y_0$. На рис. 93 $a > 0$; $D > 0$; $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$; $y > 0$ при $x < x_1$ и $x > x_2$; $y_{\min} = f(x_0) = y_0$. На рис. 94 $a < 0$; $D = 0$; $x_1 = x_2 > 0$; $y < 0$ при $x \neq x_0$; $y_{\max} = f(x_0) = 0$. **3.** а) $a < 0$; б) $a > 0$. **4.** б) См. рис. 333; в) см. рис. 334. **5.** а) $x < 0$, $x > 2$; б) $x < -2$, $x > 2$; в) $0 < x < 2$; г) $x < \frac{3}{2}$, $x > 5$; д) $]-\infty; \infty[$; е) $-\infty < x < \infty$; ж) нет решений; з) нет решений; и) $1 < x < 4$. **6.** Указание. Покажите, что $\operatorname{tg}\alpha = (x^3 - 5x^2 + 9x + 12)' > 0$ при любых действительных значениях x.

§ 34

4. См. рис. 335. **5.** См. рис. 336. **7.** а) См. рис. 337; б) см. рис. 338; в) см. рис. 339; г) см. рис. 340; д) см. рис. 341; е) см. рис. 342; ж) см. рис. 343.

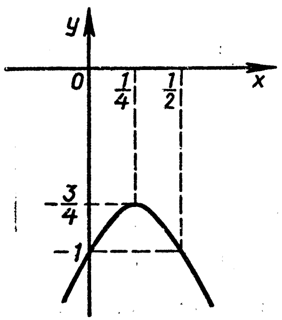


Рис. 334

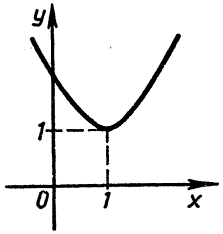


Рис. 335

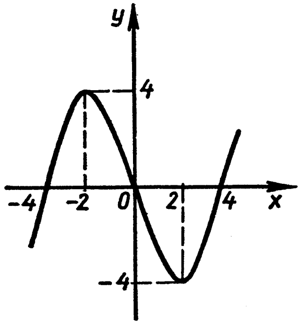


Рис. 336

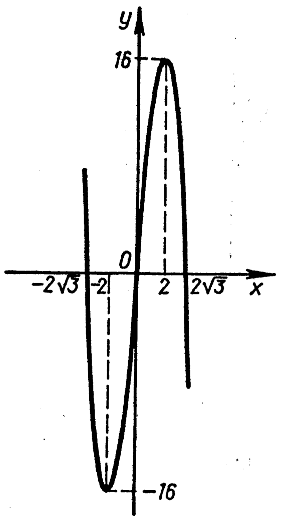


Рис. 337

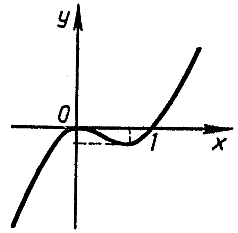


Рис. 338

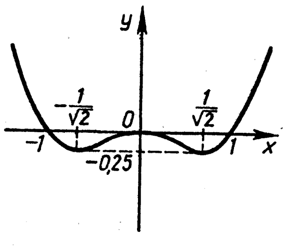


Рис. 339

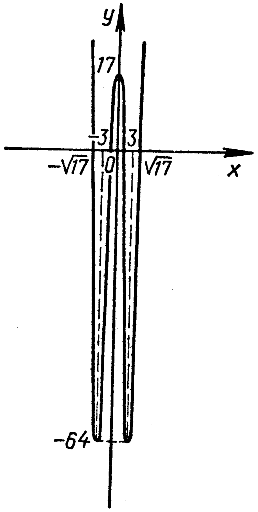


Рис. 340

§ 35

1. $\varphi_{\text{наим}} = \varphi(10)$, $\varphi_{\text{наиб}} = \varphi(-3)$. 2. $f_{\text{наим}} = f(2) = 0$, $f_{\text{наиб}} = f(3) = 4$. 5. Искомые слагаемые 20 и 20. 6. Прямоугольник имеет наибольшую площадь, если он квадрат, длина стороны которого $R\sqrt{2}$. 7. Прямоугольный треугольник равнобедренный, длина его катета 10 см. 8. $\frac{2}{3}$ дм. 9. На оси Ox отсекаемый отрезок имеет длину 2, на оси Oy — 4. 10. $h = D = 2\sqrt{\frac{s}{6\pi}}$.

§ 36

1. а) $(-2x+7)\Delta x$; б) $\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\Delta x$; в) $-\frac{3}{x^4}\Delta x$.

2. а) $\approx 283{,}5$; б) $\approx 141{,}44$; в) $\approx 1\frac{599}{600}$; г) $\approx 2\frac{15}{32}$. 3. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 4. 45°.

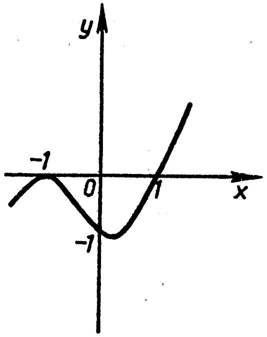


Рис. 341

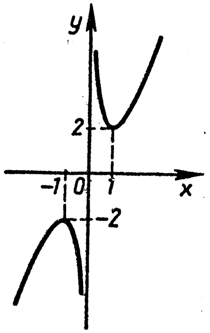


Рис. 342

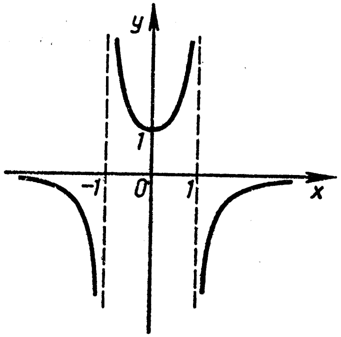


Рис. 343

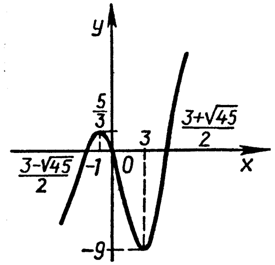


Рис. 344

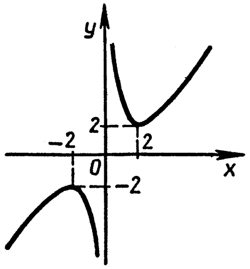


Рис. 345

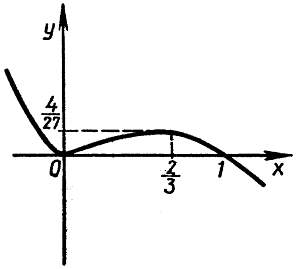


Рис. 346

5. $\left(-\sqrt[4]{\frac{1}{27}};\ -\sqrt[4]{\left(\frac{1}{27}\right)^3}\right)$, $\left(\sqrt[4]{\frac{1}{27}};\ \sqrt[4]{\left(\frac{1}{27}\right)^3}\right)$. 8. $y = -14x - 29$.

10. $\left(-\frac{5}{3};\ 11\frac{22}{27}\right)$, $(1;\ -3)$. 11. $t = 1$ с и $t = 4$ с. 12. $-8\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$; 4 с. 13. 4,25 м.

14. а) $f(x)$ возрастает при $x \leqslant -\frac{2}{\sqrt{3}}$ и $x \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$, убывает при $-\frac{2}{\sqrt{3}} \leqslant x \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$; б) $\varphi(x)$ возрастает при $x \leqslant -1$ и $x \geqslant 1$, убывает при $-1 \leqslant x < 0$ и $0 < x \leqslant 1$; в) $\psi(x)$ возрастает при $x \leqslant 2{,}5$, убывает при $x \geqslant 2{,}5$; г) $h(x)$ возрастает при $x \geqslant 0$; д) $s(x)$ возрастает при $x \geqslant 3$, убывает при $x \leqslant -3$; е) $y(x)$ возрастает при $x \leqslant 0$, а при $x > 0$ принимает постоянное значение, равное нулю.

15. а) $f(x)$ убывает при $x \leqslant 0$, возрастает при $x \geqslant 0$, $f_{\min} = f(0) = 2$; б) $\varphi(x)$ убывает при $x \leqslant -\frac{5}{6}$, возрастает при $x \geqslant -\frac{5}{6}$, $\varphi_{\min} = \varphi\left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{13}{12}$; в) $h(x)$ убывает при $x \geqslant 3$, возрастает при $x \leqslant 3$; $h_{\max} = h(3) = 0$; г) $s(x)$ убывает при $0 \leqslant x \leqslant 1$, возрастает при $x \leqslant 0$ и $x \geqslant 1$, $s_{\min} = s(1) = -1$, $s_{\max} = s(0) = 0$; д) $g(x)$ убывает при $-1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant 1$, возрастает при $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$; $g_{\min} = g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$, $g_{\max} = g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$; е) $v(x)$ возрастает при $x \geqslant 0$.

16. а) $f_{\text{наиб}} = f(\pm 2) = 13$, $f_{\text{наим}} = f(\pm 1) = 4$; б) $f_{\text{наиб}} = f(4) = 8$, $f_{\text{наим}} = f(0) = 0$; в) $f_{\text{наиб}} = f(-\sqrt[4]{3}) = -\frac{4}{3}\sqrt[4]{27}$, $f_{\text{наим}} = f(-6) = -72{,}5$; г) $f_{\text{наиб}} = f(2) = 5$, $f_{\text{наим}} = f(1) = 1$. 17. 12 и 12. 18. 1. 21. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 22. $\frac{ah}{4}$. 23. $\frac{r\sqrt{3}}{2}$.

25. а) $x < -2{,}5$, $x > 6$; б) $-5 < x < 3$; в) $x < -2{,}5$, $x > 7$; г) решений нет. 26. б) См. рис. 344; в) см. рис. 345; г) см. рис. 346; д) см. рис. 347; е) см. рис. 348; ж) см. рис. 349.

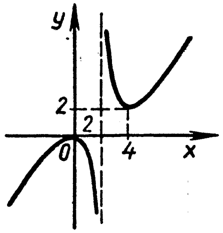


Рис. 347

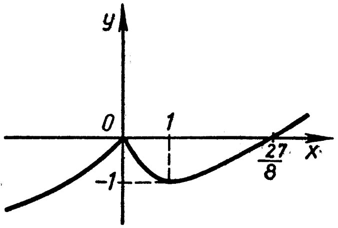


Рис. 348

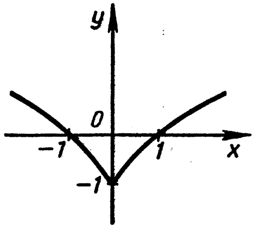


Рис. 349

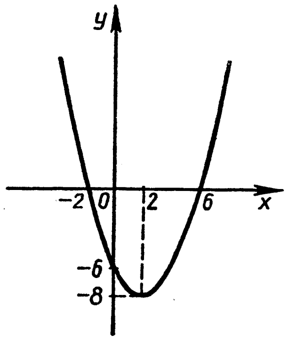


Рис. 350

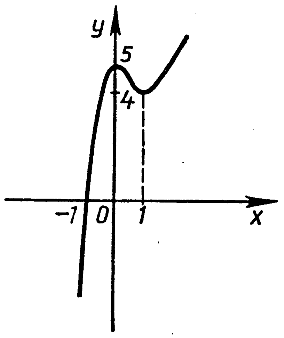


Рис. 351

§ 37

1. $y = -5x - 1$. 2. $-\frac{1}{25}$. 3. $y(x)$ возрастает при $x \leqslant -1$ и $x \geqslant 3$, убывает — $-1 \leqslant x \leqslant 3$. 4. См. рис. 350. 5. См. рис. 351. 6. $f_{\text{наиб}} = f(-1) = 5$, $f_{\text{наим}} = f(1) = -11$ 7. 20 см, 30 см.

Глава V

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ТОЖДЕСТВА

§ 38

1. а) 120°; б) 180°; в) 135°. 2. а) 7° 30′; б) 10°. 3. 5°. 4. 45° 5. $2\pi k$, $k \in Z$. 6. $R_O^{100° + 360° \cdot k}(A_1)$, $k \in Z$. 7. $R_O^{-20°}$, $R_O^{90°}$, $R_O^{0°}$

§ 39

1.

а)

Градусная величина дуги	10°	20°	35°	— 22,5°	45°	210°
Радианная величина дуги	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{7\pi}{36}$	$-\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$

б)

Градусная величина дуги	32° 5′	68° 45′	86° 31′	— 63° 45′	— 45° 50′	93°
Радианная величина дуги	0,5734	1,2	1,51	— 1,1127	— 0,8	1,6232

2. 40° ≈ 0,6981; 140° ≈ 2,4435. 3. $30° = \frac{\pi}{6}$, $60° = \frac{\pi}{3}$, $90° = \frac{\pi}{2}$. 4. $R_O^{\frac{\pi}{2}}(P) = P_1$, $P_1(0\ \ -1)$. 6. $R_O^{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}(P) = P_1$, $P_1(-1;\ 0)$. 7. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. 8. 1080° ≈ 18,8496; 10800° ≈ 188,4960.

9.

Градусная величина дуги	28° 56′	36° 40′	172° 15′	40°	—50°	83° 54′
Радианная величина дуги	0,5050	0,6399	3,0064	0,6981	—0,8727	1,4643

10. 11° 15′ ≈ 0,1964. 11. 6° ≈ 0,1047

§ 40

1. ≈ 25,12 см. 2. 30°. 3. ≈ 12,09 см. 4. 144°. 5. 60,94 см.

§ 41

1. ≈169,6 см^2. 2. ≈62,83 см^2. 3. ≈5730 см^2. 4. 600 мм^2. 5. 20 см. 6. 3,5556 ≈ 203° 43′

§ 42

3. а) $\sin\frac{\pi}{4} > \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; б) $\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; в) $\sin\frac{\pi}{6} > \cos\frac{3\pi}{4}$, г) $\cos\frac{7\pi}{4} > \cos\frac{3\pi}{4}$, д) $\cos\frac{\pi}{8} > \cos\frac{5\pi}{4}$. 4. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\sqrt{3}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, 2; $-\frac{2}{\sqrt{3}}$. 6. а) 1, б) $\frac{1}{2}$ 7. Нет. 8. а) x — любое действительное число за исключением значений $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; в) нет таких значений аргумента.

§ 43

1.

Функция	Четверть			
	I	II	III	IV
sec α cosec α	+ +	— +	— —	+ —

3. а) Отрицательно; б) отрицательно; в) отрицательно.

§ 44

1. а) 0,8339; 0,8631; 0,9784; б) 0,8453; 0,4823; 0,2750; в) 0,3096; 1,1430; 2,133; г) 3,376; 0,9137; 0,2056. 2. а) 0,9959, 0,0907, 10,983; б) 0,2571, 0,9664, 0,2660; в) 0,6894, —0,7244, —0,9516; г) 0,0905, —0,9959, —0,0908.

§ 45

1. а) Нет решений; б) ≈ 1,1 и ≈ 5,2; в) 2,3 и 4; г) 1 и 2,1, д) 3,8 и 5,6; е) нет решений. 2. а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$, г) $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$, д) $\frac{7\pi}{6}$ и $\frac{11\pi}{6}$, е) $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$; ж) $\frac{3\pi}{2}$; з) 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, 2π. 3. а) $\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6}$, б) $\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3}$, в) $\frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$; г) $0 \leqslant x < \frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3} < x \leqslant 2\pi$; д) $0 \leqslant x < \frac{\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3} < x \leqslant 2\pi$; е) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}$ и $\frac{11\pi}{6} \leqslant x \leqslant 2\pi$; ж) $\frac{5\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4}$, з) $0 \leqslant x \leqslant$

13 Заказ 252

$\leqslant \frac{\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4} \leqslant x \leqslant 2\pi$. **4.** а) $0,55 < x < 2,6$; б) $0 \leqslant x \leqslant 0,77$ и $2,37 \leqslant x \leqslant 6,28$; в) $3,35 \leqslant x \leqslant 6,07$; г) $1,82 \leqslant x \leqslant 4,46$; д) $0 \leqslant x < 0,8$ и $5,48 < x \leqslant 6,28$; е) $1,11 \leqslant x \leqslant 5,17$.

§ 46

2. а) Нет; б) нет; в) нет; г) да. **3.** а) $3 + 2\sqrt{2}$; б) 0,6; в) 0; г) 110; д) $-\frac{12}{49}$. **4.** а) $\operatorname{tg}\alpha$; б) $\sec\alpha$; в) $\operatorname{ctg}\alpha$; г) $\operatorname{cosec}\alpha$; д) $\sin^2\alpha$; е) $\cos^2\alpha$. **5.** а) 1; б) $2\cos^2\alpha$; в) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; г) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; д) $\sin^2\alpha$; е) $\cos^2\alpha$; ж) $\sin\alpha + \cos\alpha$; з) 1. **7.** а) $\sin^2\alpha$; б) $\sec x$; в) $\operatorname{ctg} x$; г) $2\operatorname{cosec}\alpha$; д) 1; е) $\sin^2 t$. **9.** $2\operatorname{tg}\alpha$.

§ 47

5. а) Нечетная; б) нечетная; в) четная; г) ни четная, ни нечетная; д) ни четная, ни нечетная; е) ни четная, ни нечетная; ж) ни четная, ни нечетная.

§ 48

3. $\sin 315° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 315° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg} 315° = -1$; $\operatorname{ctg} 315° = -1$. **4.** $\sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3}$; $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. **5.** а) -2; б) $-2,5$. **6.** а) 1; б) $\frac{1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$.

§ 49

1. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\sqrt{3}$; г) 1; д) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ж) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; з) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **2.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; г) 1. **3.** а) π; б) $\frac{\pi}{2}$; в) π; г) $\frac{\pi}{3}$. **4.** а) $\frac{1}{3}\cos\alpha$; б) $\sin\alpha - \cos\alpha$. **5.** а) 2π; б) $\frac{\pi}{2}$.

§ 50

1. $0 < x < \pi$. **2.** $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$. **3.** $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, -\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. **4.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$[1]; б) $2\pi n$; в) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n$; г) $\pi(2n+1)$.

§ 51

1. πn. **2.** $\frac{\pi}{2} + \pi n$. **3.** $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. **4.** $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

---

[1] Здесь и ниже в ответах к решениям тригонометрических уравнений n — любое целое число.

§ 52

2. а) πn; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; в) πn; г) $\frac{\pi}{2} + \pi n$. **4.** $\operatorname{arctg} 3 + \pi n$.

5. а) $(-1)^{n+1}\arcsin 0,3 + \pi n$; б) $\pm\arccos 0,3 + 2\pi n$; в) $\operatorname{arctg} 2,4 + \pi n$; г) $-\operatorname{arcctg} 0,89 + \pi(n+1)$.

§ 53

1. а) $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$; б) $\frac{(-1)^n}{5}\arcsin\frac{2}{3} + \frac{\pi n}{5}$; в) $\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + \pi n$; г) $\frac{1}{4}\operatorname{arcctg} 5 + \frac{\pi n}{4}$. **2.** а) $\pm\frac{\pi}{15} - \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi n$; б) $\frac{1}{5}\operatorname{arctg} 3 - \frac{\pi}{15} + \frac{\pi n}{5}$; в) $\pm\frac{5\pi}{36} + \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{3}$; г) $\frac{\pi}{3} + \pi n$. **3.** а) πn; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; б) $\pi + 2\pi n$; в) $\operatorname{arctg} 3 + \pi n$; $\frac{\pi}{4} + \pi n$; г) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$; д) $\frac{\pi}{4} + \pi n$. **4.** а) $\sin\alpha + \cos\alpha$; б) 0; в) 1; г) $\cos^2\alpha$. **6.** а) $x \neq \frac{\pi n}{2}$; б) $x \neq \frac{\pi n}{2}$. **7.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; б) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; в) нет решений; г) нет решений. **8.** а) $\frac{\pi n}{2}, \frac{\pi n}{3}, \frac{\pi n}{5}$, исключая значения $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$. Ответ можно записать короче: $\frac{\pi n}{3}$; $\frac{\pi n}{5}$; б) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; в) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $\pi + 2\pi n$; г) $\frac{\pi}{4} + \pi n$; $-\operatorname{arcctg} 3 + \pi(n+1)$; д) нет решений; е) нет решений.

§ 54

1. а) $2\pi n < x < \pi(2n+1)$; б) $\pi(2n+1) \leqslant x \leqslant 2\pi(n+1)$; в) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{2} + 2\pi n$; г) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$; д) $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$; е) $\frac{\pi}{2} + \pi n \leqslant x < \pi(n+1)$; ж) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{3} + 2\pi n$; з) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$; и) $\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + \pi n$. **2.** а) $\frac{3\pi}{8} + \pi n < x < \frac{9\pi}{8} + \pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n \leqslant x < \frac{3\pi}{4} + \pi n$; в) $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{7\pi}{6} + \pi n$; г) $\pi(2n+1) \leqslant x \leqslant \frac{8\pi}{3} + 2\pi n$.

§ 55

1. 0,6405; 0,6405; 1,8605. **3.** а) 18°45′; б) 71°42′; в) 52°26′; г) 58°31′. **4.** а) $\approx 10,5$; $\approx 52,36$; б) $\approx 8,8$; 43,91. **5.** $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$, $\sec\alpha = \frac{-2}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{cosec}\alpha = -2$. **6.** а) 0,7379; 0,6749; 1,0934; б) 0,9662; 0,2579; 3,747; в) 0,7115; $-0,7027$; $-1,0125$; г) 0,0216; $-0,9998$; $-0,0216$. **7.** $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}$. **8.** $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\operatorname{ctg}\alpha =$

$= -\frac{1}{2}$. **11.** а) Минус; б) минус. **12.** а) $(x-y)^2$; б) $\frac{4+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}39$; в) $b(2a-b)$. **14.** а) $\frac{2\pi}{3}$; б) 2π; в) $\frac{\pi}{4}$. **15.** а) $\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \approx 5{,}83$; б) 1,25; в) 2,5; г) 6. **18.** а) 1; б) $2\sin^2\alpha$; в) $\cos\alpha - \sin\alpha$; г) $|\cos y|$; д) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$; е) $2\operatorname{tg}^2\alpha$. **20.** а) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$; б) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$; в) πn; г) нет решений; д) $2\pi n$; е) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$; ж) нет решений. **21.** а) $\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$; б) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$. **22.** а) x — любое действительное число за исключением $\frac{\pi n}{2}$; б) x — любое действительное число за исключением $\frac{\pi}{4}(2n+1)$, $\frac{\pi}{2}(2n+1)$.
23. а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n < x < \frac{7\pi}{6}+2\pi n$; б) $\frac{3\pi}{4}+2\pi n < x < \frac{5\pi}{4}+2\pi n$; в) $\operatorname{arctg} 2+\pi n < x < \frac{\pi}{2}+\pi n$; г) $\frac{\pi}{3}+\pi n < x < \pi(n+1)$.

§ 56

1. 0,4363; 0,9250; 1,7802. **2.** 628; 86; 4300. **3.** $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$. **5.** π. **6.** а) 13; б) $\operatorname{tg}\alpha$. **8.** а) $\frac{\pi}{2}n$; б) $\frac{3\pi}{2}+2\pi n$. **9.** $\pi(3n+1)$. **10.** $\frac{2\pi}{3}+2\pi n < x < \frac{4\pi}{3}+2\pi n$.

§ 57

4. а) 10,5; б) -4. **5.** а) 13; б) -14. **6.** а) R_O^0; б) $R_O^{\frac{3\pi}{2}}$.

§ 58

2. а) $\cos 3x$; б) $\cos 4\alpha$. **3.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\frac{\sqrt{2}-2}{2}$. **4.** а) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. **8.** а) $\frac{2\pi n}{3}$; б) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$; в) $\pm\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+2\pi n$; г) $2\pi n$.

§ 59

1. а) $\sin 4\alpha$; б) $\sin 5x$; в) $\sin\alpha\cos\beta$; г) $\cos\alpha\cos\beta$; д) $\sin\beta\cos\alpha$; е) $-\sin\alpha\sin\beta$; ж) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$; з) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$. **2.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\frac{-31\sqrt{2}}{50}$; е) $\frac{-17\sqrt{2}}{26}$; ж) $-0{,}4-0{,}3\sqrt{3}$; з) $-\frac{17}{31}$. **3.** а) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; в) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; г) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$; д) $\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6}$; е) $-\frac{33}{65}$. **4.** а) $\operatorname{tg} 50°$; б) $\operatorname{ctg} 25°$; в) $\operatorname{ctg}\alpha$; г) 0; д) 0;

е) $\sin 28° - \sin 20°$; ж) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.** а) $\frac{4\pi}{3}-\pi n$; б) $\frac{3\pi}{4}+\pi n$; в) $-\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$; г) $-\operatorname{arctg} 3\sqrt{3}+\pi n$; д) $-\frac{\pi}{3}+\pi n$; е) $-\frac{\pi}{6}+\pi n$.

§ 60

1. а) $\operatorname{tg} 5x$; б) $\operatorname{tg} x$; в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$; г) 1; д) 0; е) 0; ж) 1; з) $\sqrt{3}$; и) 1. **2.** а) $\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} \approx 0{,}27$; б) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \approx 3{,}73$; в) $\sqrt{3} \approx 1{,}73$; г) $\frac{4-3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+3} \approx -0{,}12$. **5.** а) πn; б) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$; $\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n$; в) $\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}\pi n$ при $x \neq \frac{\pi}{4}+\pi n$, $x \neq \pi+2\pi n$, $x \neq \frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi n$; г) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$; д) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$ при $x \neq \frac{\pi}{3}+\frac{\pi k}{2}$, $x \neq \frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}$; е) πn.

§ 61

1. а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 1; г) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **3.** а) 0,5; б) 0; в) $\frac{1}{4}$; г) 1,5; д) -2; е) $\frac{1}{4}$; ж) $-\frac{1}{8}$; з) 0. **5.** а) $2\sin 3 \approx 0{,}2822$; б) $\sqrt{3}$; в) 1; г) 2; е) $-\frac{5}{6}$; ж) 3; з) $1\frac{2}{3}$. **6.** а) 0; б) $-2\sin\alpha$; в) $\operatorname{ctg}^2 42°$; г) $\operatorname{tg}^2 40°$; д) 1,5; е) 0; ж) $\sin^2 18°$; з) 0. **7.** а) $\sin^2\alpha$; б) $\sqrt{3}$; в) 0; г) $-2\operatorname{tg}\alpha$; д) $-\cos\alpha$; е) $-\operatorname{ctg}\beta$; ж) 1; з) $\operatorname{tg} 6\alpha$. **9.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; б) πn; в) $\pi+2\pi n$; г) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\frac{2\pi}{3}+\pi n$; д) $\pi(2n+1)$; е) πn; $-\frac{\pi}{6}+\pi n$; ж) πn; з) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$; $\pi(2n+1)$.

§ 62

2. а) 0,25; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** а) $4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$; б) $4\sin\alpha\cos^3\alpha - 4\sin^3\alpha\cos\alpha$. **4.** а) $\frac{-4\sqrt{5}}{9}$; $-\frac{1}{9}$; $4\sqrt{5}$; б) 0,28. **5.** а) $\sin x$; б) $\cos x - \sin x$; в) $\cos x$; г) 2; д) $-\cos 2x$; е) $\frac{1}{4}\cos^2 2x$; ж) $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$; з) $-\frac{1}{4}\sin 2\alpha$. **6.** а) $\cos 2\alpha$; б) $\frac{1}{4}\sin 4\alpha$; в) $\cos 4\alpha$; г) $-\sec\alpha$; д) $\cos 2\alpha$; е) $\cos^2 2\alpha$; ж) $\operatorname{cosec}\alpha$; з) $\operatorname{cosec} 2\alpha$. **8.** а) πn; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$; б) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$; в) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; г) πn; $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$; д) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$; е) πn.

§ 63

1. а) $\frac{1}{\sqrt{26}} \approx 0{,}1961$; б) $-\frac{5}{\sqrt{26}} \approx -0{,}9806$; в) -3; г) $\approx 0{,}89$. **2.** а) 1;

б) $\sin 3\alpha$; **в)** 0; г) $\sin 3\alpha$; д) $\operatorname{ctg}^2 21°$; е) $\cos^2\alpha$; ж) $-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}$; з) $-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{4}\right)$. **3.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\operatorname{arcctg} 3+\pi n$; б) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $(-1)^n\arcsin\frac{1}{5}+\pi n$; в) πn; г) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; **д)** $\frac{3\pi}{2}+2\pi n$; е) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$.

§ 64

1. а) $\frac{1}{4}\sin 4\alpha$; б) $\cos^2 2\alpha$. **2.** $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{4}$. **3.** а) $2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+2\pi n$; **б)** $\pi+2\pi n$, $2\operatorname{arctg}2+2\pi n$, $-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi n$; в) $2\operatorname{arctg}4+2\pi n$; $\pi+2\pi n$; **г)** $\pi+2\pi n, \frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, где $x\neq\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$; д) $2\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+2\pi n$; $\pi+2\pi n$. **4.** $-2{,}25$. **5.** $2\operatorname{arctg}\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}+2\pi n$, если $a^2+b^2\geqslant c^2$; нет решений, если $a^2+b^2<c^2$. **6.** 2; $-\frac{1}{3}$.

§ 65

1. а) $-2\sin 31°\cdot\sin 16°$; б) $2\cos 41°\cdot\cos 17°$; в) $2\sin 50°\cdot\cos 20°$; **г)** $-2\sin 9°\cdot\cos 26°$; д) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $\sin\frac{\alpha}{2}$. **2.** а) $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; б) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$; **в)** $\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$; г) $\frac{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\alpha}$; д) $\frac{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\alpha}$;

3. а) $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos^2\alpha}$; **в)** $\cos\alpha\cos 2\alpha$; г) $\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}{\sin^2\alpha}$; д) $4\sin 2\alpha\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\times$ $\times\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$; е) $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$; ж) $\frac{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$; **з)** $4\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$; и) $-4\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$; **к)** $\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)$; л) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$. **4.** а) $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$; **б)** $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$; в) $\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$; г) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$; д) $\cos 2\alpha$; е) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$. **5.** а) πn; $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$; б) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $2\pi n$; $\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}$; в) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $-\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}$; **г)** $\frac{\pi n}{2}$; д) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+\pi n$; е) $\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+2\pi n$.

§ 66

2. а) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$; б) πn; $\frac{\pi}{6}+\pi n$; в) $\frac{\pi}{4}+\pi n$; $-\operatorname{arctg}2+\pi n$; г) πn; $\frac{\pi}{3}+\pi n$; д) $\frac{\pi}{4}+\pi n$; $-\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\pi n$.

§ 67

5. а) $-8\sqrt{2}$; б) -9. **6.** а) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. **7.** а) 1; б) -1; в) 1; г) $\sqrt{3}$. **9.** а) πn; б) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; в) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$; г) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{2}+\pi n$; д) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$; е) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$; ж) $\frac{\pi n}{3}$; з) нет решений; и) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$; к) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$; л) πn; $(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n$; м) $\frac{5\pi}{3}+2\pi n$. **12.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\frac{\pi}{4}+\pi n$; б) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\operatorname{arctg}2+\pi n$; в) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$.

§ 68

1. а) $-14\sqrt{3}$; б) -26. 2. а) $2+\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 0. 4. $2\frac{3}{7}$. 5. а) 2; б) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; в) $2\cos\alpha$; г) $\operatorname{tg}2\alpha$. **6.** а) πn; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$; б) πn, **в)** $-\frac{\pi}{4}+\pi n$.

Глава VII
ПРОИЗВОДНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 69

3. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) -1; г) 0; д) 1; е) 0.

§ 70

5. а) 1; б) 6; в) $\frac{6}{5}$; г) 1; д) 2; е) $\frac{4}{5}$; ж) 2; з) $\frac{1}{6}$.

§ 71

2. а) $3\cos x$; б) $5\cos 5x$; в) $2x\sin x+x^2\cos x$; г) $\sin 2x-2\cos 2x$; д) $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$; е) $5\cos\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)$; ж) $-12\cos\left(\frac{\pi}{3}-4x\right)$; з) $6x^2+$ $+3\cos 3x$; и) $\sin\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}\cos\sqrt{x}$; к) $\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}$. **5.** $]3;\ \infty[$. **6.** $]3;\ \infty[$. **7.** а) $\sin^2\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}\sin 2\sqrt{x}$; б) $\frac{\sin^2 x-x\cdot\sin 2x}{\sin^4 x}$; в) $\frac{\sin x-2x\cos x}{4\sqrt{x}\sin^2 x}$; г) $\frac{2\sin x-x\cos x}{2\sin x\cdot\sqrt{\sin x}}$.

§ 72

3. а) $-5\sin 5x$, б) $\cos x-x\sin x$; в) $\cos 2x$; г) $-2\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$; д) $\frac{7}{\cos^2 7x}$; е) $\frac{x^2+x\sin 2x}{\cos^2 x}$; ж) $-\frac{2x+\sin 2x}{6x^2\sin^2 x}$; з) $-\frac{1+\sin x+\cos x}{(1+\sin x)^2}$; и) $10x-$ $-2\sin x\cos^2 x+\sin^3 x$; к) $-3\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin 0{,}2x$. **4.** а) $2x\sin x+x^2\cos x$;

б) $2x\cos x - x^2\sin x$; в) $\sin x - 4\cos x + 2\cos 2x$; г) $-12\cos 2x - 5\cos x - 4x\sin x + 3$; д) $Ab\cos bx$; е) $-Ab\sin(bx + c)$.

§ 73

2. а) $6x$; б) $-9\sin 3x$; в) $-18\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$; г) $-\cos x - 2\sin x$; д) $0{,}12\sin(0{,}2x + \pi) - 18\cos 3x$; е) $2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + 2x\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}x^2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$.

§ 74*

2. а) x^3; б) $x^2 - 5x$; в) $-\sin x$. **6.** $-2\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$. **8.** а) Рис. 352; б) рис. 353. **9.** а) $\sqrt{2}$; 2; π; $\frac{\pi}{4}$; б) $\sqrt{10}$; $\frac{1}{2}$; 4π; $2\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$. **10.** а) $\arccos\frac{3}{\sqrt{13}} \pm \arccos\frac{1}{\sqrt{13}} + 2\pi k$; б) $\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} \pm \arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + 2\pi k$.

§ 75

1. а) $5\cos 5x + 5\sin 5x + \frac{1}{4\cos^2\frac{x}{4}}$; б) $-2\sin 2x \operatorname{tg} 5x + \frac{5\cos 2x}{\cos^2 5x}$.

2. $\approx 62^\circ 40'$

§ 76

3. $\cos x$. **4.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) 1. **5.** а) 1; б) 1; в) 5; г) 2. **7.** а) $\frac{2}{3}\cos 2x$; б) $0{,}5\cos 0{,}5x - 2x$; в) $2\cos 2x + 6\sin 3x$. **8.** Указание. Докажите, что $f'(x) < 0$ при $-\infty < x < \infty$. **9.** $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$. **10.** а) $3\cos 3x$; б) $-3\sin 3x$; в) $3\cos x$; г) $4\cos 2x$. **11.** а) $20x^3 - 14$; б) $18\cos 3x$; в) $-\sin x\cos^2 3x - 6\cos x\sin 6x - 18\sin x\cos 6x$. **13.** 45°.

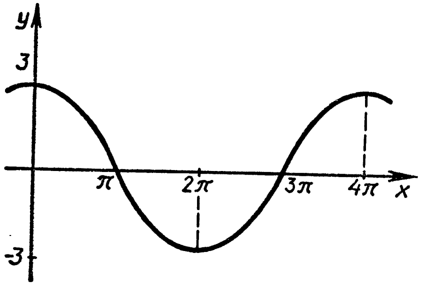


Рис. 352

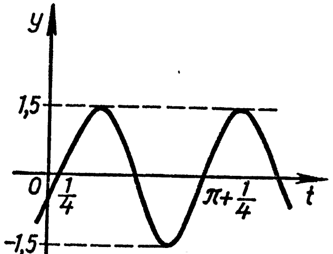


Рис. 353

§ 77

1. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) 7. **2.** а) $-6\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; в) $\cos x + 6\sin x - 2\cos 2x$. **3.** Указание. Докажите, что $f'(x) > 0$ при $x \in]-\infty, \infty[$. **5.** 45° **6.** $y = \pi - x$.

Глава VIII

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ, ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ, СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИИ И ИХ ПРОИЗВОДНЫЕ

§ 78

3. а) $2abc^4$; б) $a^3b^{-2}c^{-1}d^3$; в) $3^{-1} \cdot a^2b^{-2}c$; г) $5(a + b)^3$; д) $4 \cdot 9^{-1}x^2y^2(x - y)^4$; е) $21x^3y^pz^k$; ж) $1875(a + b)^m b^2(a - b)^k$. **4.** а) $\frac{b^2\sqrt[12]{b}}{a\sqrt{a}}$; б) $\frac{d^4}{b^3} \cdot \frac{\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[3]{d}}{\sqrt[4]{b}}$; в) $\frac{\sqrt[20]{(c + d)^9}}{d}$. **5.** а) $\frac{b^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{13}{35}}}$; б) $a^{\frac{13}{10}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$; в) $(a + b)^{\frac{2}{15}} \cdot a^{\frac{17}{30}}$; г) $a^{\frac{19}{16}}$. **6.** а) 3; б) 0; в) $6\frac{1}{3}$. **7.** а) 4; б) 2; в) 64; г) 99; д) $2^{\sqrt{5}}$. **8.** а) 4; б) 10; в) $x\sqrt[3]{(1 - x)^2}$; г) $a - 1$. **9.** а) $\frac{1}{2}$; б) 2,52.

§ 79

3. а) $\approx -0{,}7$; 0; $\approx 1{,}3$; б) $x < 0$, $x > 1$. **4.** а) $\approx 0{,}7$; 0; $\approx -1{,}3$; б) $x > 0$, $x < -1$. **7.** а) $\left(\frac{5}{7}\right)^{0{,}8} < 1$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} > 1$; в) $\left(\frac{4}{5}\right)^3 > \left(\frac{4}{5}\right)^5$; г) $(0{,}4)^{-2} > (0{,}4)^3$; д) $(2{,}56)^0 = (0{,}312)^0$; е) $1{,}7^{-3} < 1{,}7^{-2}$; ж) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2{,}7} > \left(\frac{1}{3}\right)^{5{,}2}$; з) $\left(\frac{8}{5}\right)^{-3} < \left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$; и) $(0{,}2)^{-6{,}5} > 5^{5{,}6}$; к) $3^{-1{,}2} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2{,}8}$; л) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^{-1} < 1$. **8.** а) $0 < a < 1$; б) $0 < a < 1$; в) не существует; г) $a > 1$; д) $0 < a < 1$. **9.** Во всех случаях $\alpha < \beta$. **10.** $\alpha > 1$. **11.** а) $\pi^{1{,}5} > 3{,}14^{1{,}5}$; б) $e^{-0{,}8} < 2{,}72^{-0{,}8}$. **12.** а) Нет; б) нет. **13.** Рис. 354; рис. 355. **14.** Убывает от 64 до 1;

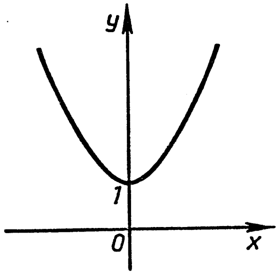


Рис. 354

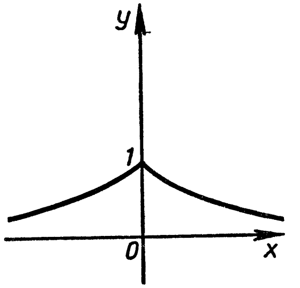


Рис. 355

$y\left(-\frac{1}{2}\right)=2$. **15.** а) $]-\infty;\ 3[\,\cup\,]3;\ \infty[$; б) $]-\infty;\ -2]\cup[2;\ \infty[$; в) $]-\infty;\ \infty[$. **16.** а) $y\geqslant 1$, б) $y<0$; в) $y\geqslant 0$. **18.** Указание. Найдите отношение $\frac{y(k+1)}{y(k)}$.

§ 80

3. а) 0; б) ± 1; в) $4\sqrt{2}$; г) 1; д) -1; е) $\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$; ж) -1 и 7; з) 10; и) 2; к) -4 и 1; л) $-2{,}5$; 3; м) 9. **4.** а) $\log_3 7$; б) $-(1+\log_2 5)$; в) $2+\lg 3$; г) $\log_{\frac{2}{3}} 7$; д) $\log_{\frac{5}{7}} 2$; е) 1; ж) $\log_{\frac{49}{5}} 25$; з) $\log_2 12$. **5.** а) 2; б) 2; в) 3; г) -1; д) 6; е) 66; ж) 0; з) 1,5; и) $\log_{\frac{2}{3}}\frac{8}{3}$; к) $\pm\sqrt{3}$. **6.** а) 1; 3; б) 0; $\log_7 5$; в) 3; г) 3; д) 2; е) 1; ж) 1; з) 0; и) 3; 11; к) 1,5; л) -2; м) 0; -1; н) ± 2; о) ± 2. **7.** а) 2; б) $\approx -1{,}8$; 2; в) -1; г) $\approx -0{,}8$; 2; д) 0,8; е) $\approx \pm 1{,}5$.

§ 81

1. $a>1$. **2.** $0<a<1$. **3.** а) $x<4$; б) $x\leqslant -1$; в) $x<4$; г) $x>\frac{4}{3}$; д) $x\geqslant -\frac{2}{3}$; е) $x>3$; ж) $0<x\leqslant\frac{1}{2}$, $x\geqslant 1$; з) 1, 2, ..., 7. **4.** а) $x<\log_7 3$; б) $x\leqslant\log_{\frac{3}{5}} 81$; в) $x\geqslant -\log_{400} 3$; г) $x\leqslant\log_{\frac{1}{18}} 24$; д) $x>\frac{1}{6}\log_5\frac{3}{200}$. **5.** а) $x>5$; б) $x\geqslant 1$; в) $x<1$; г) $x\leqslant 3$; д) $x>0$. **6.** а) $x<0$, $x>\log_7 5$; б) $x>0$; в) $\log_3\frac{2}{3}<x<2$; г) $x<2$. **7.** а) $x>a$; б) $x\leqslant a$; в) $x\leqslant b$, $x>0$; г) $b<x<0$; д) $x<c$ и $x>d$; е) $c<x<d$; ж) $x\leqslant c$; з) $x\geqslant c$. **8.** а) $[2;\ \infty[$; б) $]-\infty;\ -1[$; в) $]-\infty;\ -\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3};\ \infty[$; г) $]2\pi k;\ \pi+2\pi k\mid k\in Z[$.

§ 82

2. $k=1$. **3.** 1, 3, -1, $\frac{1}{2}$. **6.** а) e^x; б) $2^x\ln 2$; в) $-\frac{1}{3^x}\ln 3$; г) $\pi^x\ln\pi$. **7.** а) $3\cdot 5^{3x}\ln 5$; б) $-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}\ln 3$; в) $2\cdot e^{2x}-\frac{\ln 3}{3^x}$; г) $2^{\sin x}(1+x\cos x\times\ln 2)$; д) $\frac{1-2x\ln 3}{3^{2x}}$; е) $\frac{(0{,}5)^x(1-2x\ln 2)+1}{2\sqrt{x}}$; ж) $7e^{-7x}-\frac{\sin\frac{x}{3}}{6\pi}$; з) $e^{x+1}\times\sec^2 e^{x+1}$; и) $\frac{2^{\frac{x}{4}}(\ln 2(1-\sin^3 7x)+84\sin^2 7x\cos 7x)}{4(1-\sin^3 7x)^2}$. **8.** а) $-32805\ln 3$; б) $\ln 2$; в) $\frac{3\ln 3}{\sqrt{8}}$. **9.** а) $x+ey=2$; б) $y=\frac{1}{2}\ln(e\cdot 2^{x+1})$; в) $ye-x=0$. **10.** 45°.

§ 83

2. а) $y=\log_2 x$; б) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$; в) $y=\log_a x$, где $a>0$, $a\neq 1$. **3.** 2; 1; 0; -1; -2. **6.** а) $\log_3 4<\log_3 6$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 7>\log_{\frac{1}{3}} 9$; в) $\log_6 5>\log_8 5$; г) $\log_{\frac{1}{2}} 3<\log_{\frac{1}{4}} 3$.

7. а) $x>3$; б) $x>5$. **8.** а) $\log_{0.8} 4\cdot\log_{\frac{1}{2}} 5>0$; б) $\log_3 10-2>0$; в) $\log_{0,2} 18-\log_{0,2} 17<0$. **9.** Указание. Установите зависимость между этими функциями. **10.** а) $]-1;\ \infty[$; б) $]1;\ \infty[$; в) $]-\infty;\ 0[$; г) $]-\infty;\ 0[\,\cup\,]0;\ \infty[$; д) $]-2;\ 2[$; е) $]-\infty;\ \infty[$; ж) $]-\infty;\ 0[\,\cup\,]0;\ \infty[$; з) $]-1;\ \infty[$; и) $]2;\ 3[$. **11.** а) $]0;\ \pi[$; б) $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\pi;\ \frac{3}{2}\pi\right[$; в) $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2}\pi;\ 2\pi\right]$; г) $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\pi;\ \frac{3}{2}\pi\right[$. **12.** д) Рис. 356; е) рис. 357. **13.** а) $a>1$; б) $0<a<1$.

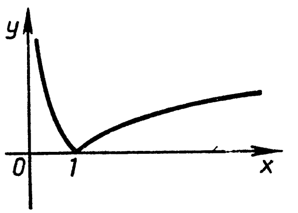


Рис. 356

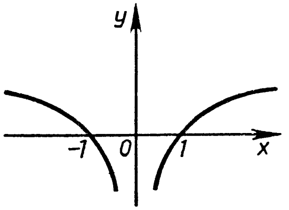


Рис. 357

§ 84

2. а) $\log_6 216=3$; б) $\log_4 1024=5$; в) $\log_{0,1} 0{,}0001=4$; г) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27}=3$; д) $\log_2\frac{1}{32}=-5$; е) $\log_{\frac{1}{7}} 343=-3$. **3.** а) $2^{-3}=\frac{1}{8}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$; в) $5^4=625$; г) $2^{10}=1024$; д) $(0{,}1)^4=0{,}0001$; е) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}=\frac{27}{64}$. **4.** а) 1; б) 3; в) -1; г) -4; д) n; е) $\frac{1}{2}$; ж) $\frac{2}{3}$; з) $\frac{2}{5}$; и) $-\frac{1}{2}$; к) $-\frac{3}{2}$. **5.** а) 5; б) -1; в) -3; г) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{3}{2}$; е) $-\frac{1}{2}$; ж) $\frac{2}{3}$; з) $\frac{9}{5}$. **6.** а) 32; б) 6; в) $\frac{1}{9}$; г) $\frac{1}{4}$; д) 64; е) 9; ж) $\frac{1}{4}$; з) $\frac{1}{1600}$; и) 9; к) $\frac{1}{4}$. **7.** a^a. **8.** а) 10; б) 405; в) 16; г) $\frac{8}{27}$; д) ab, где $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$; е) $\frac{a}{b}$, где $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$; ж) b^3, где $b>0$; з) $\sqrt[3]{b}$, где $b>0$; и) $\frac{a^2}{b}$, где $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$; к) 150; л) $\frac{9}{625}$; м) 28. **9.** а) $\frac{b+a}{1-b}$; б) $\frac{2b+a}{2(1-b)}$. **10.** $\frac{18}{2a+3}$. **11.** а) $\frac{1}{3}$; б) 4; в) 3; г) 4; д) 1; е) -3. **12.** $-(a+b)$. **13.** Указание. Примените в каждом случае модуль перехода от одной системы логарифмов к другой.

§ 85

2. а) 0,7781; б) 1,0791; в) 0,6990; г) 1,1761; д) $-0{,}2731$; е) 0,6811; ж) $-0{,}2219$; з) $-0{,}9209$. **3.** а) Увеличится в два раза; б) уменьшится в два раза; в) увеличится в три раза; г) уменьшится в три раза; д) увеличится на $\log_a 3$; е) уменьшится на $\log_a 4$. **4.** а) $\lg x=\lg 3+\lg a+\lg b$; б) $\lg x=\lg 2+\lg b+\lg c-\lg a$; в) $\lg x=2\lg a+5\lg b-3\lg c$; г) $\lg x=\lg 4+\lg(a+b)$; д) $\lg x=\lg(a+b)-\lg(a-b)$; е) $\lg x=\frac{1}{3}\lg a+\frac{1}{3}\lg c-2\lg(a+c)$; ж) $\lg x=\lg\sin\alpha+\lg\cos\alpha-\lg a-\lg b-\lg c$; з) $\lg x=\frac{1}{2}(\lg p+\lg(p-a)+\lg(p-b)+\lg(p-c))$; и) $\lg x=\lg 5+\frac{4}{3}\lg a+\frac{2}{3}\lg(a-b)$. **5.** а) $\lg h=\frac{5}{3}\lg a+\frac{5}{12}\lg b-\frac{5}{4}\lg 3$; б) $\lg v=3\lg c+\lg\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{3}\lg\cos\alpha-\lg 6$;

в) $\lg s=\lg 6+\frac{3}{2}\lg h-\frac{1}{2}\lg\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\lg\cos\alpha$; г) $\lg z=\frac{1}{2}\lg a+\frac{1}{4}\lg b-\lg 2$; д) $\lg t=\lg 3+\frac{1}{2}\lg m+\frac{1}{6}\lg n-\lg 4$. **6.** а) $\lg x=\lg 2+2\lg\sin\frac{\alpha}{2}$; б) $\lg x=\lg 2+2\lg\cos\frac{\alpha}{2}$; в) $\lg x=\lg 2+2\lg\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; г) $\lg x=\lg 4+\lg\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)+\lg\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)$; д) $\lg x=\lg 2+\lg\sin\left(3\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$; е) $\lg x=\lg 4+\lg\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\lg\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$; ж) $\lg x=\lg\cos 2\alpha$; з) $\lg x=\lg\sin 2\alpha+\lg\sin 2\beta$; и) $\lg x=\lg 2+\lg\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\lg\cos\alpha$; к) $\lg x=\lg 2+\lg\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)+\lg\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-2\lg\sin 2\alpha$. **7.** а) $x=a^3b$; б) $x=\frac{a}{b^4}$; в) $x=\frac{a^2c^4}{b^3}$; г) $x=\frac{(a+b)^2}{\sqrt{a-b}}$; д) $x=\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{b^3}$; е) $x=\frac{1}{a-b}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^2}$ 8. а) $x=18\frac{2}{3}$; б) $x=18$; в) $x=\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{25}{4}}$; г) $x=\frac{\sqrt[3]{a+b}}{a(b+c)^2}$. **9.** а) $3{,}78\cdot 10$; 1; б) $5{,}3214\cdot 10^2$; 2; в) $1{,}5\cdot 10^{-1}$; г) $3{,}85\cdot 10^{-4}$; −4. **10.** а) 0; б) 2; в) 3; г) −1; д) −3. **11.** а) $N>1$; б) $1<N<10$; в) $0<N<1$. **12.** а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) n; е) −2; ж) −3; з) −4, и) −6. **13.** От умножения числа на 10^n мантисса его логарифма не изменяется. **14.** а) 1,9494; б) 2,5340; в) −0,8327; г) −2,2007; д) 1,3410. **15.** а) 4,2506; б) 1,5128; в) −3,2340; г) −0,1283. **16.** а) 69,42; б) 2,271; в) 0,1644; г) 0,00133. **17.** а) 48; б) 35. **18.** $21^{23}-23^{21}>0$. **19.** а) $\approx 87{,}7$; б) $\approx 0{,}007868$; в) $\approx 3{,}871$; г) 0,1297. **20.** а) −6,3814; б) −6,2296; в) −1,5479; г) 0,6295.

§ 86

5. а) −1; б) $-4\frac{2}{3}$; в) 1,0016; г) 4; д) −8; 1; е) 0; 3; ж) ±5. **6.** а) Нет решений; б) 4; в) $\frac{1}{2}$; г) 4; д) 5; 95; е) 6; 14; ж) 4; з) 13. **7.** а) $\frac{1}{2}$; 16; б) 0,0001; 10; в) 9; 27; г) $\sqrt[9]{2}$ 2; д) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$; е) 0,1; 10; 0,001; 1000. **8.** а) $\frac{1}{3}$; 3; б) $\frac{1}{8}$; 2; в) 25. г) $\frac{1}{9}$, д) $\frac{1}{2}$, 8; е) 100; ж) 0,1; 100; з) 0,1; $10^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}$; $10^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$; и) $\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$; $\sqrt[3]{10}$. **9.** а) 4; б) $\sqrt{5}$; 25; в) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$; 4; г) $\frac{1}{4}$; 4; д) $\frac{1}{5}$; $\sqrt{5}$. **10.** а) 1; б) нет решений; в) $\approx 0{,}08$; $\approx 1{,}47$; г) $\approx 0{,}6$; д) $\approx 1{,}2$. **11.** а) 2; б) $1\frac{3}{4}$; в) 0,1; г) 15,5; д) 0,1; 10; е) 16; ж) 8; з) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; $\sqrt{10}$; и) 0,0001; 10; к) $\approx 1{,}3$.

§ 87

3. а) $\log_{0,3}100-\log_{0,3}9<0$; б) $\log_{1,7}\left(\frac{1}{2}(1-\log_7 3)\right)<0$; в) $\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)<0$. **4.** а) $x>\frac{4}{5}$; б) $\frac{2}{5}<x<\frac{1}{2}$; в) $2<x<3{,}5$; $3{,}5<x<5$; г) $2\leqslant x\leqslant 3$; д) $x<2$; $x>9$; е) $-1\leqslant x<0$; $3<x\leqslant 4$.

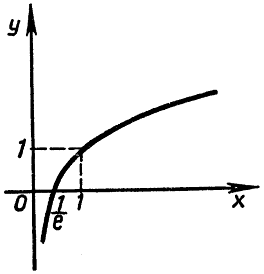


Рис. 358

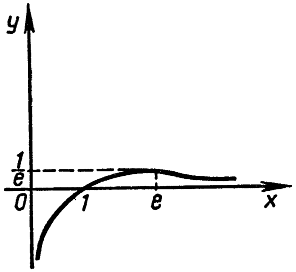


Рис. 359

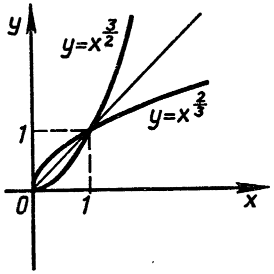


Рис. 360

5. а) $1{,}6<x<5$; б) $2<x<3$; в) $0<x<1$; $x>1$; г) $2<x<4$; д) $3<x\leqslant 5$. **6.** а) $0{,}1\leqslant x\leqslant 1000$; б) $1<x<1{,}04$; $x>26$; в) $0<x<\frac{1}{\sqrt{8}}$; $x>4$; г) $0{,}1<x<10$. **7.** а) $1<x<2$; б) $0<x\leqslant 3$; в) $x<-1{,}3$.

§ 88

3. а) $\frac{1}{x\ln 2}$; б) $\frac{3}{x\ln 5}$; в) $\frac{1}{2(x-1)\ln 0{,}1}$; г) $-2\sin x+\frac{1}{x}$; д) $x^2\ln(e\cdot x^3)$; е) $4x\cdot\log_2 x+\frac{2x^2+5}{x\ln 2}$; ж) $e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$; з) $\frac{1}{x(1-\ln x)^2}$. **4.** а) $\frac{1}{4\ln 2}$; б) $\frac{2}{3\ln 10}$; в) $-\sqrt{3}$; г) $2e$; д) $\frac{2}{e}$. **5.** а) $\frac{3}{2(3x+1)}$; б) $\frac{4x}{5(x^2-6)}$; в) $-\frac{2}{3(1-x^2)}$. **6.** $y=\frac{1}{e}$. **7.** (1; 0). **8.** а) Убывает при $x>0$; б) возрастает при $x>1$ и убывает при $0<x<1$. **9.** а) При $x=2$ функция имеет минимум, $y_{\min}=2(1-\ln 2)$; б) при $x=\frac{1}{e}$ функция имеет минимум, $y_{\min}=-\frac{1}{e}$. **10.** а) Рис. 358; б) рис. 359.

§ 89

3. а) При $-\infty<x<0$ функция убывает, а при $0<x<\infty$ — возрастает; б) возрастает в области своего определения. **4.** а) $-3{,}1x^{-4,1}$; б) $-2x^{-3}$; в) $\sqrt{2}\cdot x^{\sqrt{2}-1}$; г) $3{,}5x^{2,5}$. **5.** Рис. 360. **6.** а) 27; б) $0\leqslant x<27$; в) $27<x<\infty$. **7.** б) Рис. 361; г) рис. 362.

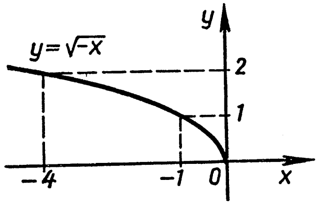


Рис. 361

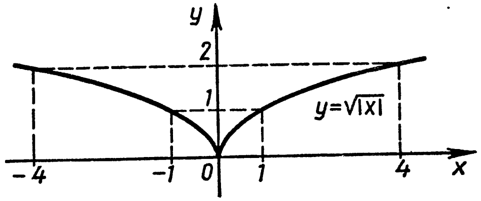


Рис. 362

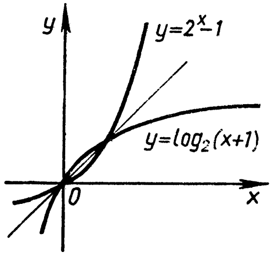


Рис. 363

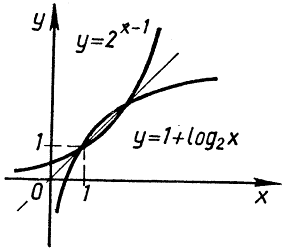


Рис. 364

§ 90

1. а) -7; б) $\frac{1}{8}$; в) $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2$; г) $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2$; д) $\frac{b}{a}\sqrt{a}$; е) $\frac{\sqrt{a}}{2a(a-b)}$; ж) 1, з) $2\sqrt[4]{ax}$. **2.** $\frac{1}{\sqrt[5]{5}}$. **3.** а) $\left(\frac{1}{8}\right)^{10}>\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$; б) $\log_3 4>\log_4 3$; в) $\log_5 9>\log_7 3$; г) $\frac{10^{1966}+1}{10^{1967}+1}>\frac{10^{1967}+1}{10^{1968}+1}$; д) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$. **4.** На рис. 227 $p\in\,]-\infty;\ \infty[$, на рис. 228 $0<p<1$; на рис. 229 $p<0$. **5.** На рис. 230 $a>1$; на рис. 231 $0<a<1$; на рис. 232 $a>1$; на рис. 233 $0<a<1$. **7.** Убывает от 512 до 1; $y\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}$ **8.** Возрастает от $\frac{1}{9^9}$ до $\frac{1}{9^3}$; $y\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **9.** а) $y_{\text{наиб}}=3$; $y_{\text{наим}}=\frac{1}{3}$; б) $y_{\text{наиб}}=4$; $y_{\text{наим}}=1$; в) $y_{\text{наиб}}=10$; $y_{\text{наим}}=6$; г) $y_{\text{наиб}}=50$; $y_{\text{наим}}=2$. **10.** а) $]-\infty;\ -1[$, $]-1;\ 1[$, $]1;\ \infty[$; б) $]-\infty;\ -2[$, $]-2;\ 2[$, $]2;\ \infty[$. **11.** а) Рис. 363; б) рис. 364. **12.** Указание. Вычислите отношение $\frac{y(n+1)}{y(n)}$. **13.** а) $x=9$; б) $x=0,1$ или $x=\sqrt{10}$. **14.** а) $]-\infty;\ 1[\,\cup\,]1;\ \infty[$; б) $]-\infty;\ -3]\cup[3;\ \infty[$; в) $]-\infty;\ \infty[$; г) $]-1;\ \infty[$; д) $]-\infty;\ 0[\,\cup\,]0;\ \infty[$; е) $]2;\ \infty[$; ж) $]-\infty;\ \frac{2}{3}[$; з) $]-2;\ 3[$; и) $]-\infty;\ -2[\,\cup\,]-2;\ \infty[$; к) $]-\frac{5}{2};\ 1[$; л) $]-\infty;\ 1[$; м) $\left]-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right[$, $k\in\mathbf{Z}$; н) $\left]-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup\left]\frac{1}{\sqrt{2}};\ 2\right[$, о) $]2\pi k;\ \pi+2\pi k[$, $k\in\mathbf{Z}$. **15.** а) 0; б) 0; в) $-\frac{1}{2}$; г) 4; д) 9; е) 16. **16.** а) $\approx 18,27$; б) $\approx 0,0003080$; в) $\approx 0,0009014$; г) $\approx 0,2182$. **17.** а) $x<-3$; б) $x<3$; в) $x>1$; $0<x<0,5$; г) $x<-2\frac{2}{3}$; д) $x>\frac{1}{2}$; е) $x>2\frac{2}{3}$; ж) $x>3,5$; з) $1,25<x<2$; $x>2$; и) $x>2\frac{1}{3}$; к) $1,5<x<2,5$; $2,5<x<3,5$. **18.** а) 1,5; б) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ и $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$, в) 2; г) $\frac{\lg 1053}{\lg\left(\frac{13}{3}\right)^2}$; д) $x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$; е) $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; ж) 0; з) 1; и) 4; к) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$, л) $\log_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}1,5$. **19.** а) -1; б) $\approx -0,5$; в) $\approx -3,14$; $\approx -6,28$; г) $\approx -1,8$; $\approx 0,5$. **20.** а) $x<5$; б) $x<\frac{4}{3}$; в) $x<2$, г) $-2<x<3$; д) $x\leqslant 3$; е) $-1\leqslant x\leqslant 35$; ж) $1<x<2$, з) $0<x<1$; $x>\log_3 4$; и) $x>\log_2\frac{2}{7}$. **21.** Указание. В данном по условию выражении выделите полный квадрат. **22.** а) 2; б) $\frac{1}{\sqrt{10}}$, 100. **23.** а) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$; б) 1025; в) e^3-1; г) 2; д) 5; е) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; 10; ж) 0,2; 0,04; з) 0,1; 10; и) 27; к) $2^{-\sqrt{2}}$; $2^{\sqrt{2}}$. **24.** а) -18; б) 9; в) 100; г) 0,01; 100; д) 100; е) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$; ж) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$; з) $\frac{1}{3}$; и) 0; к) 1; 5; л) множество действительных чисел за исключением нуля. **25.** а) 1; б) $\approx 0,2$; $\approx 1,5$; в) $\approx 1,6$; г) нет решений; д) $\approx 1,2$. **27.** а) $\pi k<x<\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; б) $-\frac{\pi}{12}+\pi k<x<\pi k$; $\frac{\pi}{3}+\pi k<x<\frac{5\pi}{12}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; в) $x>0$; г) $-1<x\leqslant 0$; д) $x>7$; е) $10<x<100$; $x>100$; ж) $2\leqslant x\leqslant 4$; з) $x\geqslant 2$; и) $0<x\leqslant\frac{1}{2}$; $x\geqslant 32$; к) $x<-1,5$; $x>4$; л) $x>0$. **28.** а) $x<-2$; $x>1,8$; б) $x<\approx -0,6$; в) $x>\approx 2$; г) $0<x<\approx 0,001$; $x>\approx 2$. **29.** а) $1,5x^4-8x^3$; б) $1-x+x^2-x^3$; в) $-\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^4}+\frac{4}{x^5}$; г) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}-\frac{4}{\sqrt[3]{x}}$; д) $1-4x^3+15x^2-\frac{3}{2x\sqrt{x}}$. **30.** а) $2e^{2x}$; б) $-e^{\frac{x}{2}}$, в) $-\frac{8}{e^{2x}}$; г) $-\frac{24}{e^{6x}}$; д) $-2\sin x\cdot e^{2\cos x}$; е) $\frac{3e^{3\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}$; ж) $2^x\ln 2$, з) $-7\cdot 5^{-7x}\ln 5$; и) $\frac{-16\ln 4}{4^{2x}}$; к) $\frac{-16\ln 1,3}{1,3^{4x}}$; л) $(2x-5)\cdot 0,7^{x^2-5x+3}\cdot\ln 0,7$; м) $\frac{3\ln 6}{\sin^2 x\cdot 6^{3\operatorname{ctg}x}}$; н) $3e^{3x}-\frac{\ln 4}{4^x}$; о) $\frac{7\cdot(\cos x+x\sin x+4)}{(\cos x+4)^2}$; п) $\frac{\cos x+2x\cdot\sin x}{2\sqrt{x}\cdot\cos^2 x}$.

31. а) $\frac{1}{x\ln 3}$; б) $-\frac{1}{x\ln 2}$; в) $\frac{2}{(2x-5)\ln 0,2}$; г) $\frac{7}{(7x-6)\ln 5}$; д) $\frac{1}{x\ln 10}$, е) $-\operatorname{tg}x$; ж) $\frac{2}{\sin 2x}$; з) $2^x\cdot\left(\ln 2\cdot\ln 3x+\frac{1}{x}\right)$; и) $5\cdot 3^{x+1}\cdot\ln 3+\frac{2}{(2x-1)\ln 2}$; к) $\frac{\sin x-x\cdot\cos x\cdot\ln 2x}{x\cdot\sin^2 x}$; л) $\frac{\sqrt{x}\ln 3x-2(\sqrt{x}+1)}{2x\cdot\ln^2 3x}$; м) $10^x\times\left(\ln 10\ln x+\frac{1}{x}\right)$; н) $x^{n-1}\left(n\ln(4x+9)+\frac{4x}{4x+9}\right)$; о) $\frac{3x^2\cdot\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(x^3+2\sqrt{x}-4)\cdot\ln 5}$.

32. а) $y=2,5x-1,5$; б) $y=-1,5x-0,5$; в) $y=x+1$; г) $y=\frac{1}{2}ex$; д) $y=\frac{1}{2}(1+\ln 2-x\ln 2)$; е) $y=3x-1$; ж) $y=\ln e\cdot(5x-1)$. **33.** 45°.

34. а) Функция убывает при $x\leqslant 0$ и $x\geqslant 8$, возрастает при $0\leqslant x\leqslant 8$; $f_{\min}=f(0)=0$, $f_{\max}=f(8)=25,6$; б) функция убывает при $-1\leqslant x\leqslant 1$, возрастает при $x\leqslant -1$ и $x\geqslant 1$; $f_{\min}=f(1)=1$, $f_{\max}=f(-1)=e^4$; в) функция убывает при $x\leqslant 1$, возрастает при $x\geqslant 1$; $y_{\min}=y(1)=\frac{1}{3}$; г) функция

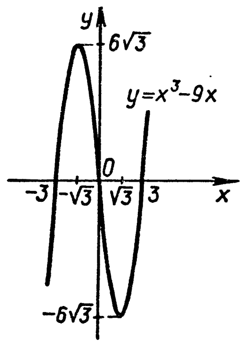


Рис. 365

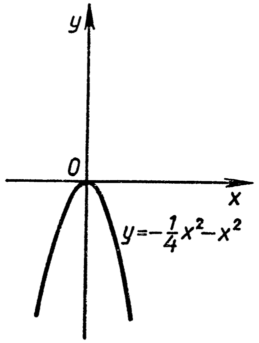


Рис. 366

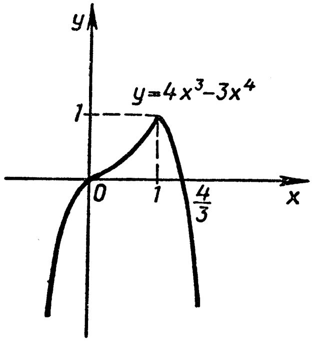


Рис. 367

убывает при $e^{-2} < x \leqslant 1$, возрастает при $0 < x \leqslant e^{-2}$ и $x \geqslant 1$; $f_{\max} = f\left(\frac{1}{e^2}\right) = 4e^{-2}$, $f_{\min} = f(1) = 0$; д) функция убывает при $\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$, возрастает при $2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $\frac{5}{4}\pi + 2\pi k \leqslant x \leqslant 2\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; $f_{\min} = f\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}e^{\frac{5\pi}{4}+2\pi k}$, $f_{\max} = f\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{\frac{\pi}{4}+2\pi k}$.

35. а) Указание. Докажите, что данная функция возрастает при $x \in D(y)$. **36.** а) Рис. 365; б) рис. 366; в) рис. 367; г) рис. 368; д) рис. 369; е) рис. 370.

§ 91

1. 32. **2.** а) $3 \cdot 4^x \ln 4$; б) $-e^{-2x}(2\cos 3x + 3\sin 3x)$; в) $\frac{2(2-x)}{x(4-x)}$; г) $20x^9$; д) $-\frac{4}{3x^2\sqrt[3]{x}}$. **3.** а) Рис. 371; б) рис. 372; в) рис. 373. **4.** а) 2; б) 3. **5.** $y = 3\left(3x\ln 3 + \ln\frac{e}{3}\right)$. **6.** а) $x \leqslant 5$; б) $2{,}5 < x < 3$. **7.** $\approx 0{,}08612$.

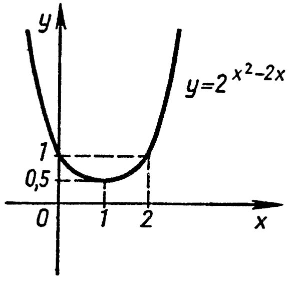


Рис. 368

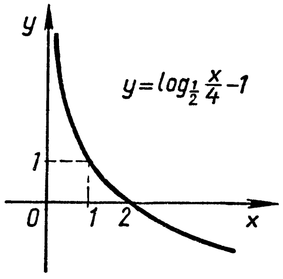


Рис. 369

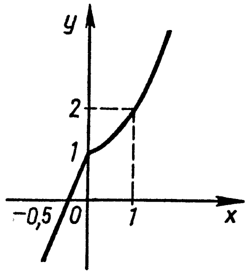


Рис. 370

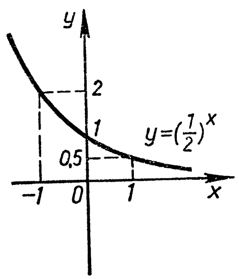


Рис. 371

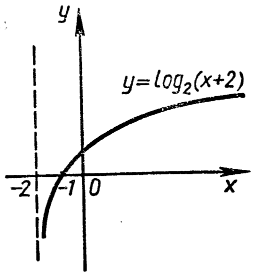


Рис. 372

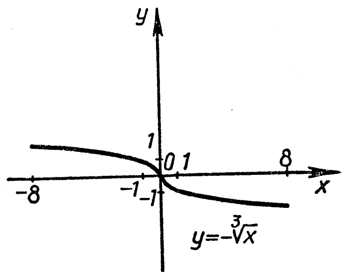


Рис. 373

Глава IX
ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

§ 92

2. в) $-\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$ для всех $x > 0$; г) $f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$, если $n \geqslant 2$, $x \in \mathbf{R}$; $f'(x) = (x)' = 1$, если $n = 1$, $x \in \mathbf{R}$. **10.** а) $5x + C$; б) $-x + C$; в) $\frac{1}{3}x^3 + C$; г) $\sin x + C$. **11.** Является. **12.** Не является.

§ 93

5. а) $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{5}$; б) $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} + \frac{6}{5}$; в) $-\frac{1}{x}$; г) $\ln x - 1$; д) $\ln(-x)$; е) $-\cos x + 1$; ж) $\sin x + 1$; з) $\operatorname{tg} x - 2$; и) $-\operatorname{ctg} x + \sqrt{3}$; к) $e^x + 3$; л) $\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2}$; м) $-\frac{3^{-x}}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 3}$.

§ 94

1. а) $-\frac{7}{2}x^2 + 4x + C$; б) $\frac{a}{2}x^2 + bx + C$; в) $x^3 + 4x + C$; г) $\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 8x + C$; д) $\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + d$; е) $\frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx + e$.

2. а) $-\frac{3}{x} + \frac{2}{3}\cos 3x + C$; б) $-\frac{3}{2}\operatorname{ctg} 2x + C$; в) $4x + \frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x + C$; г) $12\sin\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\cos 4x + C$; д) $\frac{1}{2}e^{2x-3} + C$; е) $\frac{2^{0{,}5x+2}}{\ln 2} + C$; ж) $\sqrt{4x-1} + C$; з) $\frac{1}{2}\ln(4x-1) + C$.

§ 95

2. Не являются криволинейными трапециями фигуры, заштрихованные на рисунках 252, 253, 257. Остальные фигуры являются криволинейными трапециями.
3. $S(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$; $S'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)' = x + 1$.

§ 96

1. а) $2\frac{2}{3}$; б) 4. 2. а) 2; б) 2. 3. а) $4\frac{2}{3}$; б) $17\frac{1}{3}$. 4. а) $2\ln 3 \approx 2{,}1972$, б) 2. 5. а) $\frac{3}{\ln 2} \approx 4{,}3284$; б) $\frac{8}{3\ln 3} \approx 2{,}4273$.

§ 97

1. $\frac{1}{2}$. Указание. Воспользуйтесь формулой суммы $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n$ первых n членов арифметической прогрессии, в которой первый член $\frac{1}{n}$, разность $\frac{1}{n}$, число членов $n - 1$. 2. $\frac{1}{6}$.

§ 98

1. а) $\frac{1}{2}$; б) 3; в) $\frac{2}{3}$; г) $6\frac{1}{3}$; д) 1. 2. График функции $y = \sqrt{1-x^2}$ есть верхняя полуокружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1. Площадь полукруга равна $\frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$. 3. а) $6\frac{3}{5}$; б) 20; 4. а) $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$; б) 0,75. 5. а) 12,4; б) $54\frac{3}{7}$. 6. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{4}{9}$. 7. а) $\frac{\pi^3}{3} + 4$; б) $\frac{\pi^4}{64} - 3$. 8. а) $10\frac{2}{3}$; б) 4,5. 9. а) $e - \frac{1}{e} \approx 2{,}3504$; б) $\frac{3{,}5}{\ln 2} \approx 5{,}0494$. 10. а) $\frac{\sqrt{3}+1}{2} \approx$ $\approx 1{,}3660$; б) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}573$. 11. а) $\ln 3 \approx 1{,}0986$; б) $\ln 2 \approx 0{,}6931$.

§ 99

1. $\frac{1}{6}$. 2. $1\frac{1}{6}$. 3. $7\frac{1}{3}$. 5. 12. 6. $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3} \approx 0{,}6848$. 7. 320 м. 8. $s(t) = \frac{1}{4}t^4 + t^2 + 3\frac{3}{4}$. 9. $12\pi \approx 37{,}70$. 10. Указание. Искомая площадь равна площади фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = e$, $x = 0$.

§ 100

1. а) $4x^2 - 3x + C$; б) $\frac{1}{9}x^3 + x + C$; в) $2\sin x + C$. 2. $F_2(x)$, $F_3(x)$, $F_5(x)$. 3. $2x^3 - x^2 + 5x + 10$. 4. $S(x) = x^2 + 3x$; $S'(x) = 2x + 3$. 5. а) 9; б) $1\frac{1}{3}$; в) 3; г) $\frac{2}{\ln 2}$; д) $\sqrt{2}$; е) 2; ж) 10; з) $1\frac{11}{15}$; и) $0{,}5 - \sqrt{3}$; к) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; л) 1. 6. а) $\int_a^a f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^a = F(a) - F(a) = 0$; б) $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx$; д) $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^c + F(x)\Big|_c^b = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$. 7. 16. 8. 8. 9. 9. 10. $10\frac{2}{3}$. 11. $\frac{4}{\ln 3} \approx 3{,}6409$. 12. $-2 \leqslant k \leqslant 2$. 13. $\pi \approx 3{,}14$. 14. $\frac{5}{12}$. 15. $24\pi \approx 75{,}40$. 16. $m = e^3$. 17. $d = \log_3 2$. 18. $k = \frac{\pi}{3}$. 19. $1\frac{1}{3}$. 20. $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \approx 0{,}6848$. 21. $3\sqrt[3]{x-1} + C$, если $x > 1$; $3\sqrt[3]{1-x} + C$, если $x < 1$. 22. а) $\frac{1}{2}x^2 + C$, если $x \geqslant 0$; $-\frac{1}{2}x^2 + C$, если $x < 0$; б) $\frac{1}{2}x^2 - x + C$, если $x \geqslant 1$; $-\frac{1}{2}x^2 + x - 1 + C$, если $x < 1$. 23. а) π; б) π; в) $\frac{\sqrt{2}}{6}$; г) 4. 24. 3. 26. 4,5. 27. а) 6; б) 3. 28. $A = -\frac{2}{\pi}$; $B = 2$. 29. $[\log_2 3;\ \infty[$. 30. $[\log_2 3;\ \infty[$. 31. $a = 1$. 32. $C = \frac{2}{3}$.

§ 101

2. $-2\cos x - 2$. 3. а) $-x^3 + 7x + C$; б) $-6\cos\frac{x}{2} + C$; в) $-\frac{1}{2}e^{-2x} + C$. 4. а) $1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}866$; б) $e^2 - 1 \approx 6{,}3891$; в) $2\frac{2}{3}$. 5. а) 1; б) $\frac{3}{7}\left(4\sqrt[3]{2} - 1\right)$; в) $e^2 - e$.

Глава X
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

§ 102

7. а) Нет; б) да. 8. а) -1; 2; б) 6; в) 4; г) -4; -1; д) -4; е) ± 10; ж) нет решения. 10. Указание. Докажите, что уравнения определены для одних и тех же значений переменной x. 11. Указание. Докажите, что каждый корень уравнения $f(x) \cdot \varphi(x) = 0$ удовлетворяет объединению уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ \varphi(x) = 0 \end{array}\right.$ и наоборот.

§ 103

2. а) $x \geqslant -2{,}5$; б) $x \in\ ]-\infty;\ \infty[$; в) $x \geqslant 2{,}5$; г) $-3 \leqslant x \leqslant 1{,}4$; д) $x \geqslant 1$. 5. а) 2; б) -3; 3; в) 6; г) нет решений; д) $\frac{1}{19}$; е) 0; $\frac{1}{2}$; ж) -2; з) $-\frac{1}{3}$; 2; и) 5; к) 7; л) -3; м) 3. 6. а) ± 2; б) -7; в) $-\frac{1}{3}$; г) $\frac{55}{9}$; д) 7; е) 9; ж) -5; 4; з) нет решений; и) нет решений; к) $-\frac{1}{11}$. 7. а) 100; б) 19; 84; в) 0; 1; г) 10; д) -1; $\frac{5-4\sqrt{67}}{10}$; $\frac{5+4\sqrt{67}}{10}$; 2; е) 1; 2; ж) 2; з) -2; 1; и) 1. 8. а) 0; 1; б) нет решений; в) 1; г) 3.

§ 104

2. а) 45°; б) 135°; в) 60°. 3. а) $y = x + 1$; б) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$; в) $y = -x -$

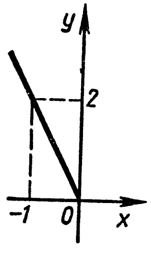


Рис. 374

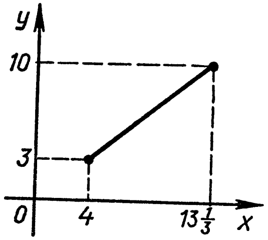


Рис. 375

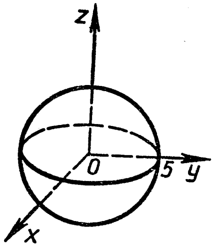


Рис. 376

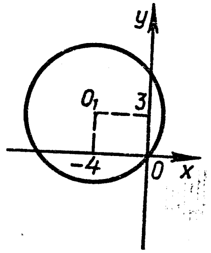


Рис. 377

—3. **4.** $a=-\sqrt{3}$. **5.** а) $a=-b$; б) $a=b$. **6.** $y=3$. **7.** а) Рис. 374; б) рис. 375. **9.** д) рис. 376; е) рис. 377. **10.** Искомое множество точек $x^2+(y-10)^2=3^2$ — окружность с центром в точке (9; 0) и радиусом, равным 3. **11.** $\sqrt{3,6}$.

§ 105

2. а) (2; —3); б) $\left(\frac{5}{3};\ \frac{3}{4}\right)$; в) (3; 5). **5.** Угловые коэффициенты прямых равны. **6.** Во всех трех случаях прямые пересекаются. **7.** $\Delta \neq 0$ при $a \in \boldsymbol{R}$. **8.** $a=-4$. **9.** $a=-10$. **12.** а) Если $a \neq \pm 2$, то система имеет единственное решение: $\left(\frac{8}{a-2};\ \frac{4}{2-a}\right)$; если $a=2$ — пустое множество решений; если $a=-2$ — бесконечное множество решений; б) если $k \neq -2{,}5$, то система имеет единственное решение $\left(\frac{19}{2k+5};\ \frac{2-3k}{2k+5}\right)$; если $k=-2{,}5$ — пустое множество решений; в) если $b \neq \pm 2$, то система имеет единственное решение $\left(\frac{7}{4-b^2};\ \frac{1-2b^2}{4-b^2}\right)$, если $b=\pm 2$ — пустое множество решений; г) если $c \neq \pm 1$, то система имеет единственное решение $\left(\frac{5-c}{1-c^2};\ \frac{1-5c}{1-c^2}\right)$, если $c=\pm 1$ — пустое множество решений.

§ 106

3. а) (1; 2; —3); б) (1; —1; 2); в) (—1; 3; 4); г) (3; 0; —1); д) нет решений; е) $\left(\frac{14}{11}-\frac{5}{11}t;\ \frac{13}{11}t+\frac{1}{11};\ t\right)$, где $t \in \boldsymbol{R}$; ж) (2; 1; —1); з) нет решений; и) $\left(-\frac{31}{5}+\frac{1}{5}t;\ \frac{14}{5}+\frac{1}{5}t;\ t\right)$, где $t \in \boldsymbol{R}$. **4.** Пересекаются в одной точке. **5.** Возможны следующие варианты: а) все три плоскости различны, но пересекаются по прямой, общей для этих плоскостей; б) две плоскости совпадают и пересекаются третьей; в) все три плоскости совпадают. **6.** $\varnothing$. **7.** а) $(4-14t;\ -1+9t;\ t;\ 0)$, $t \in \boldsymbol{R}$; б) (—1; 0; 2; 1).

§ 107

3. а) (—2; —5); (5; 2); б) (5; —8,5); (5; 1); $(6-\sqrt{46};\ -4)$; $(6+\sqrt{46};\ -4)$; в) (—3; 2); (2; —3); г) (5; —2); д) (1; 3); (3; 1); е) (1; —3); (—1; 3); (3; —1); (—3; 1); ж) (—4; —4); (3; 3); $\left(\frac{\sqrt{57}-3}{2};\ \frac{3-\sqrt{57}}{2}\right)$; $\left(-\frac{3+\sqrt{57}}{2};\ \frac{3+\sqrt{57}}{2}\right)$;

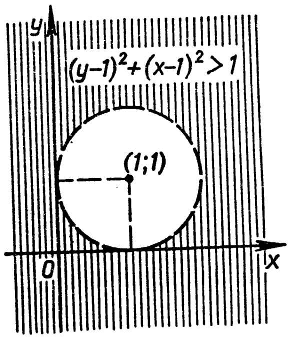


Рис. 378

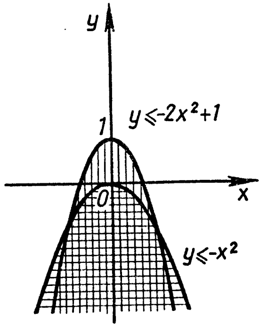


Рис. 379

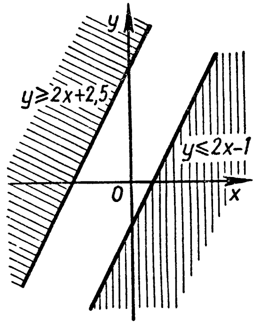


Рис. 380

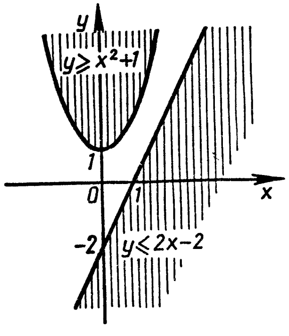


Рис. 381

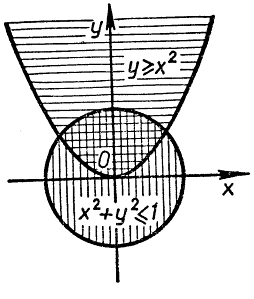


Рис. 382

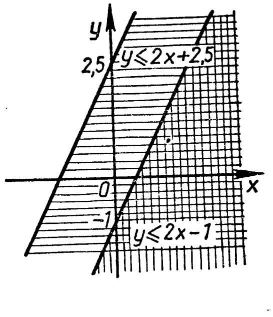


Рис. 383

з) $(34{,}5-4{,}5\sqrt{57};\ 34{,}5+4{,}5\sqrt{57})$; $(34{,}5+4{,}5\sqrt{57};\ 34{,}5-4{,}5\sqrt{57})$; и) $\varnothing$. **4.** а) (6; 0); (0; 6); (—6; 0); б) (0; 0); (—4,6; —1,9); (—4; —4); (—1,9; —4,6). **5.** а) (2; 1); (—2; —1); $\left(\frac{22}{\sqrt{141}};\ \frac{1}{\sqrt{141}}\right)$, $\left(-\frac{22}{\sqrt{141}};\ -\frac{1}{\sqrt{141}}\right)$; б) (100; 1000); (1000; 10); в) (4; 9); г) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $k,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

§ 108

2. (5; —2), (3; —1), (2,5; 0). **3.** к) Рис. 378. **5.** е) Рис. 379. **6.** а) Рис. 380; б) рис. 381; в) рис. 382; г) рис. 383; д) рис. 384; е) рис. 385; ж) рис. 386; з) рис. 387; и) рис. 388; к) рис. 389; л) рис. 390; м) рис. 391.

§ 109

2. а) Да; б) нет; в) нет; г) да; д) нет; е) нет. **3.** а) $p=-3$; б) $p=0$; в) $p=0$. **4.** $a=-10$. **5.** а) $3 \leqslant x < 5$; б) множество всех точек плоскости, кроме точки (—3; 0); в) множество всех точек плоскости, кроме точек прямых $x=\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; г) $x \geqslant 3$. **6.** а) $\frac{1}{3}$; —5; 2; б) $\frac{1+\sqrt{37}}{2}$; в) 2; г) 7. **7.** Преобразо-

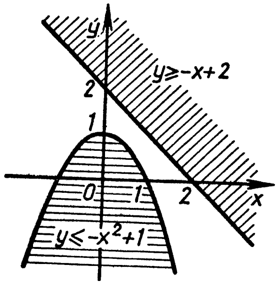

y
y≥-x+2
2
1
0
1
2
x
y≤-x²+1

Рис. 384

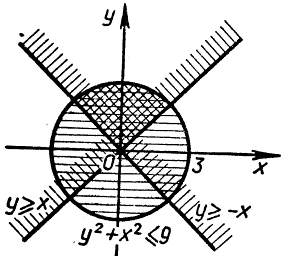

y
0
3
x
y≥x
y≥-x
y²+x²≤9

Рис. 385

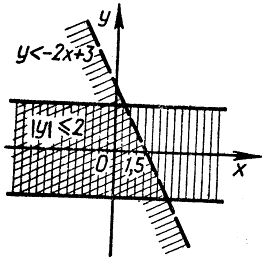

y
y<-2x+3
|y|≤2
0
1,5
x

Рис. 386

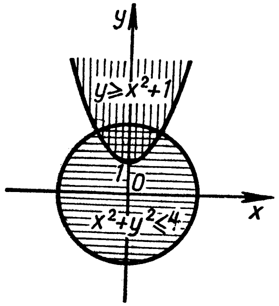

y
y≥x²+1
1
0
x²+y²≤4
x

Рис. 387

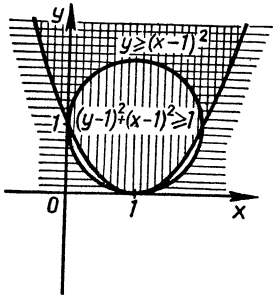

y
y≥(x-1)²
1
(y-1)²+(x-1)²≥1
0
1
x

Рис. 388

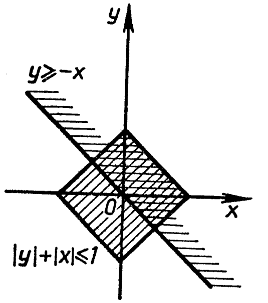


Рис. 389

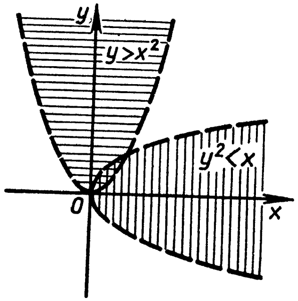


Рис. 390

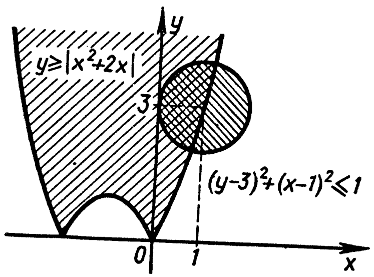

y
y≥|x²+2x|
3
(y-3)²+(x-1)²≤1
0
1
x

Рис. 391

вания а), в), г), д), е), ж), з). **10.** а) $x=\frac{1}{a-1}$, $y=\frac{2-a}{1-a}$; б) при $a\neq-0{,}5$ $x=\frac{4}{1+2a}$, $y=\frac{2}{1+2a}$; при $a=-0{,}5$ нет решений; в) $x=\frac{20-4b}{15+8b^2}$, $y=\frac{6+16b}{15+8b^2}$; г) при $a\neq1{,}5$ $x=0$, $y=3$; при $a=1{,}5$ система имеет бесконечное множество решений; д) при $a\neq-2$ $x=\frac{8}{a+2}$, $y=\frac{6-5a}{a+2}$; при $a=-2$ нет

решений. **11.** а) 45°; б) 135°; в) 60°. **12.** $-2\sqrt{3}$. **13.** а) (1; 1; —1); б) (1; 2; —1), в) (1; 3; —2); г) (—1; 3; —2). **14.** а) (3; 1); (4; 2); б) (3; 4); (3; —4); (—3; 4); (—3; —4); в) $\left(-\sqrt{\frac{13}{2}};\ -\frac{17}{\sqrt{26}}\right)$; $\left(\sqrt{\frac{13}{2}};\ \frac{17}{\sqrt{26}}\right)$; г) (—1; —1); $\left(-\frac{2}{\sqrt{10}};\ -\frac{7}{2\sqrt{10}}\right)$; $\left(\frac{2}{\sqrt{10}};\ \frac{7}{2\sqrt{10}}\right)$; (1; 1); д) (2; 3); (3; 2); (1; 5); (5; 1); е) (—4; —3); (—3; —4); (3; 4); (4; 3); ж) $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3}\right)$; з) $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}};\ 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$; $\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\ -2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$; (—2; —1); (2; 1); и) (1; 1); (—3; 5); к) $\left(\frac{3}{4};\ \frac{1}{4}\right)$, $\left(-\frac{3}{4};\ -\frac{1}{4}\right)$; л) (2; 2); м) (—1; —2); (1; 2): $\left(-\frac{3}{\sqrt{7}};\ -\frac{5}{\sqrt{7}}\right)$; $\left(\frac{3}{\sqrt{7}};\ \frac{5}{\sqrt{7}}\right)$; н) (—27; —8); (8; 27); о) $\left((-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \pi n\right)$, $k, n\in\mathbf{Z}$. **15.** а) (0; 1); (1; 0); б) (7; —1); (7; 1); в) (4; 8); (8; 4); г) (2; 1); д) (—4; —3); (3; 4); е) $\left(12;\ \frac{2}{3}\right)$; ж) $\left(\frac{4}{5};\ \frac{1}{5}\right)$; з) (2; 2).

16. а) $\frac{5}{3}$; б) 7; в) 7; г) 12; д) 4.

§ 110

1. 3; —5. **2.** $-\frac{3}{2}$. **3.** При $a\neq\pm4$ система имеет единственное решение $\left(\frac{6}{4+a};\ -\frac{3}{4+a}\right)$. **4.** $\left(2-\frac{5}{4}t;\ 1-\frac{3}{4}t;\ t\right)$, $t\in\mathbf{R}$. **5.** а) (—2; —3); (—3; —2); (2; 3); (3; 2); б) (4; 2). **6.** а) Множество точек полуплоскости, расположенных ниже прямой $y=\frac{1}{2}x+1$; б) множество точек внутренней области параболы $y=-x^2+2x+1$, исключая точки, принадлежащие этой параболе. **7.** а) Рис. 392; б) рис. 393; в) рис. 394.

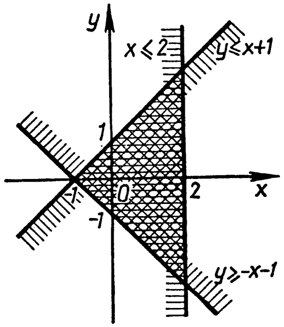

y
x≤2
y≤x+1
1
-1
0
2
x
-1
y≥-x-1

Рис. 392

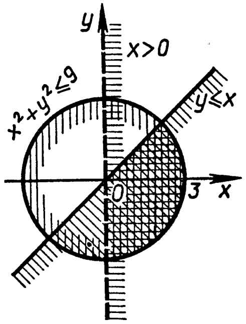

y
x>0
x²+y²≤9
y≤x
0
3
x

Рис. 393

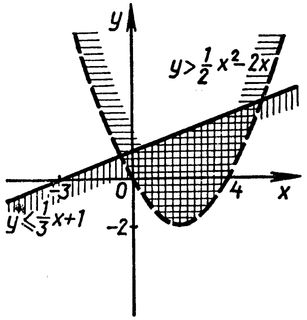

y
y>1/2 x²-2x
-3
0
4
x
y≤1/3 x+1
-2

Рис. 394

Глава XI

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. $\frac{1}{2}=0{,}5$; $-2\frac{6}{7}=-2{,}(857142)$; $\frac{34}{75}=0{,}45\,(3)$. **2.** $2{,}375=2\frac{3}{8}$; $0,(32)=\frac{32}{99}$; $0{,}45333...=\frac{34}{75}$; $-1{,}03\,(25)=-1\frac{161}{4950}$. **4.** а) $-1<x<2$; б) $x\geqslant 1$, $x\leqslant -1{,}5$. **6.** а) $x<1$, $x>1$; б) $x<1$, $1<x<2$, $x>2$; в) $x\geqslant 1$; г) $x>-2$. **7.** а) $x\geqslant\frac{1}{2}$; б) $x\leqslant\frac{-5-\sqrt{40}}{3}$, $x\geqslant\frac{-5+\sqrt{40}}{3}$; в) $x>1{,}5$; г) $x>\frac{2}{3}$; д) $x\leqslant -2$, $1<x\leqslant 2$; е) $-1<x<1$; ж) $x>0$; з) $1\leqslant x\leqslant 3$.

8. $y=\begin{cases} x \text{ при } 0\leqslant x<2, \\ 2 \text{ при } 2\leqslant x\leqslant 4, \\ -x+6 \text{ при } 4<x\leqslant 6\end{cases}$ и $y=\begin{cases}-1 \text{ при } x<0, \\ 1 \text{ при } x\geqslant 0.\end{cases}$ **9.** а) $y=\frac{x}{2}$; б) $y=4x-3$; в) $y=\sqrt[3]{x}$; г) $y=\log_2 x$, если $x>0$. **10.** а) Возрастающая функция; б) возрастающая; в) убывающая; г) возрастает при $x<2$ и убывает при $x>2$. **11.** а) Периодическая, $T\in \mathbf{R}$; б) непериодическая; в) непериодическая, г) непериодическая, д) периодическая, $T=\pi$. **13.** а) $1\leqslant n\leqslant 9$; б) $n\geqslant 33$. **15.** $n=9$. **16.** $u_1^n\cdot q^{n^2+n}$. **17.** Указание. Представьте $0,(m)$ в виде $0,(m)=\frac{m}{10}+\frac{m}{100}+\frac{m}{1000}+\ldots$ **18.** 10. **19.** 10. **20.** 1 или 9. **21.** 36; $-12{,}4$; $-\frac{4}{3}$; ... . **22.** 13 м/с. **23.** а) 1,5; б) $\frac{1}{4}$; в) 3; г) 2,5; д) 0,5; е) $\frac{3}{7}$; ж) -4; з) 16. **24.** а) $\frac{4}{3\cdot\sqrt[3]{x}}+\frac{20\sqrt[3]{x}}{3}-\frac{2}{x^3}$; б) $6x(x^4+3x^2-1)^2(2x^2+3)$; в) $(2{,}5x+1{,}5)\sqrt{x}$; г) $3\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 25. $y=3x-5$. **26.** а) $f(x)$ возрастает при $x\leqslant 7$, убывает при $x\geqslant 7$, $f_{\max}=f(7)=24{,}5$; б) $g(x)$ возрастает на множестве действительных чисел; в) $\varphi(x)$ возрастает при $x<0$ и $x>0$; г) $h(x)$ возрастает при $x\leqslant -1$; $0\leqslant x\leqslant 1$; убывает при $-1\leqslant x\leqslant 0$, $x\geqslant 1$, $h_{\max}=h(-1)=h(1)=1$. $h_{\min}=h(0)=0$. **27.** а) $f_{\min}=f(0)=0$, $f_{\max}=f(2)=\frac{4}{e^2}$; б) $f_{\max}=f(-1)=\frac{1}{e^2}$, $f_{\min}=f(0)=0$; в) $f_{\max}=f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=-\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$; г) $f_{\min}=f(2)=0$, $f_{\max}=$

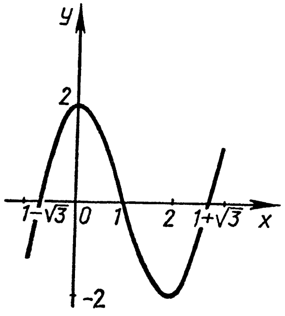


Рис. 395

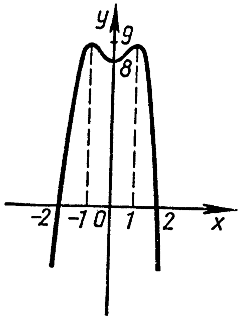


Рис. 396

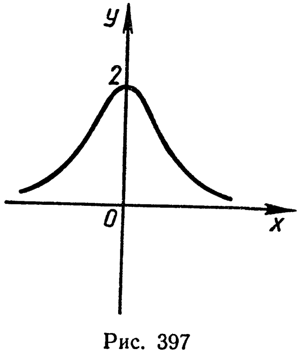


Рис. 397

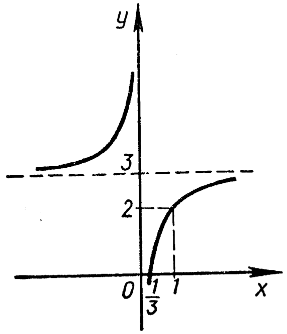


Рис. 398

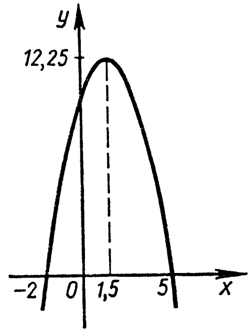


Рис. 399

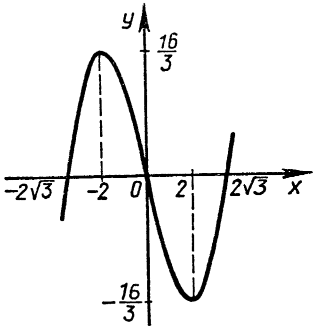


Рис. 400

$=f(2{,}5)=0{,}0625$, $f_{\min}=f(3)=0$; д) $f_{\max}=f(-\sqrt{2})=-(17+12\sqrt{2})$, $f_{\min}=f(\sqrt{2})=12\sqrt{2}-17$; е) $f_{\min}=f(1{,}5)=6{,}75$; ж) $f_{\min}=f(-1)=\frac{1}{3}$, $f_{\max}=f(1)=3$; з) $f_{\min}=f\left(\frac{7}{11}\right)=-\frac{25}{96}$. **28.** а) $f_{\text{наиб}}=f(3)=9$, $f_{\text{наим}}=f(0)=0$; б) $f_{\text{наиб}}=f(1)=4$, $f_{\text{наим}}=f(0)=f(3)=0$; в) $f_{\text{наиб}}=f(2)=22$, $f_{\text{наим}}=f(-1)=-5$; г) $f_{\text{наиб}}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$, $f_{\text{наим}}=f(0)=2$; д) $f_{\text{наиб}}=f(2\pi)=2$, $f_{\text{наим}}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=0$; е) $f_{\text{наиб}}=f(1)=\frac{83}{3\ln 3}+3$, $f_{\text{наим}}=f(-1)=\frac{9}{\ln 3}-3$. **29.** а) Рис. 395; б) рис. 396; в) рис. 397; г) рис. 398. **30.** x^3+1. **31.** а) $\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+C$; б) $-3\cos x+C$; в) $-\frac{1}{3}\cos 3x+C$; г) $4\sqrt[4]{x^3}+\frac{x^2}{2}+C$; д) $-\frac{7}{3}\operatorname{ctg} 3x+C$; е) $\frac{1}{2}e^{2x-3}+C$. **32.** а) Рис. 399; б) рис. 400; в) рис. 401; г) рис. 402; д) рис. 403; е) рис. 404; ж) рис. 405; з) рис. 406; и) рис. 407; к) рис. 408; л) рис. 409. **33.** а) x^4-x+C; б) $-\frac{1}{2x^2}-\frac{2}{3}\cos 3x+C$; в) $3x-\frac{5}{2}x^2+C$; г) $\frac{x^2}{2}-\ln|x|+C$; д) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{3}{2}\operatorname{ctg} 2x+C$; е) $\frac{2}{3}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+C$. **34.** а) 2; б) 1; в) $-682{,}5$; г) 1;

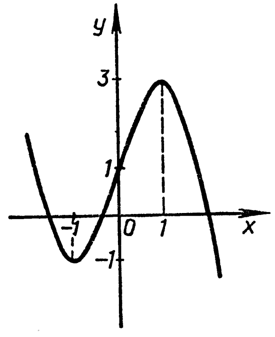


Рис. 401

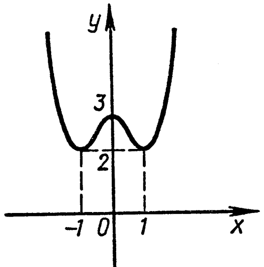


Рис. 402

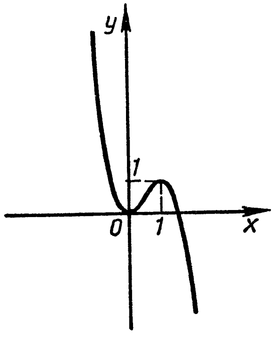


Рис. 403

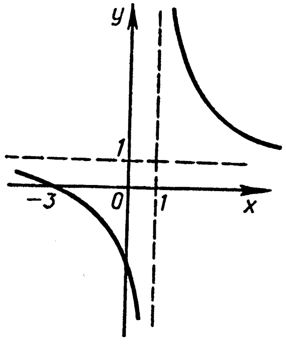


Рис. 404

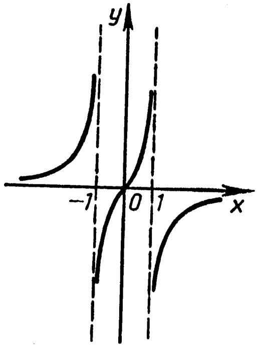


Рис. 405

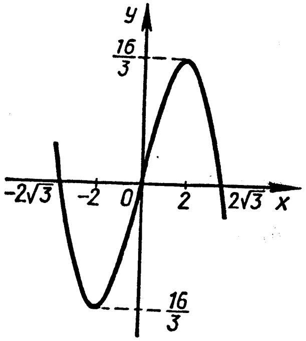


Рис. 406

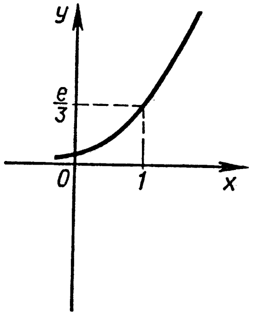


Рис. 407

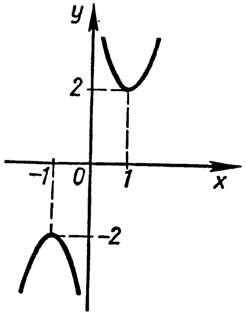


Рис. 408

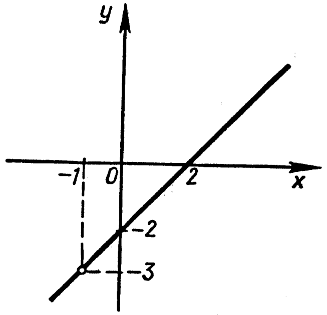


Рис. 409

д) 18,6; е) 3. **35.** а) 4,5; б) 4,5; в) $\frac{4}{3}$. **36.** а) Нет решений; б) 1; в) -3; 1; г) нет решений. **37.** а) 3; б) 1; в) 2; г) нет решений; д) 16; е) 81; ж) $-\frac{1}{2}$; з) 2. **38.** а) Единственное решение; б) пустое множество решений; в) бесконечное множество решений. **39.** а) $\left(\frac{3}{5};\ \frac{28}{5};\ 1\right)$; б) $(3-t;\ t-1;\ t)$, $t \in \boldsymbol{R}$; в) нет решений. **40.** а) (8; 4); (4; 8); б) (1; 1); $\left(3;\ \frac{1}{3}\right)$. **41.** а) $x=\frac{3}{2}$; б) $x<-2$ и $x>2$; в) $2<x<5$; г) $2<x<5$. **42.** а) $-\frac{29}{11}<x<\frac{10}{3}$; б) $2{,}7<x<6$. **44.** На рис. 322 $\begin{cases} y \leqslant x-3, \\ y > x^2; \end{cases}$ на рис. 323 $\begin{cases} y \geqslant -x^2+2, \\ y-x \geqslant 0; \end{cases}$ на рис. 324 $\begin{cases} y^2+x^2 \leqslant 4, \\ y \leqslant x^2. \end{cases}$ **45.** а) $6\frac{1}{3}$; б) $\sqrt[6]{ab^3}$. **46.** а) $-\frac{5}{x^6}$; б) $\frac{3}{2}\sqrt{x}$, в) $\ln 2 \cdot x^{\ln 2 \quad 1}$, г) $-\frac{e}{x^{e+1}}$, д) $\sin\sqrt{2}$. **47.** а) $\frac{x^4}{4}+C$; б) $2\sqrt{x}+C$; в) $\frac{3}{2}\cdot\frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1}+C$; г) $\frac{x^{\ln 2+1}}{\ln 2+1}+C$. **48.** а) $\frac{8}{3}$; б) $\frac{75}{4}$; в) $\sqrt{2}-1$ **49.** а) $x>4$; б) $x<-\frac{3}{2}$; в) $x<-5$; г) $x<3$; д) $x>2$. **50.** а) $2^{x+3}\ln 2$;

б) $-4e^{3-4x}$; в) $3^{\sin x}\cdot\cos x\cdot\ln 3$; г) $(0{,}2)^x(\ln 0{,}2\cdot\sin 3x+3\cos x)$; д) $-2e^{-2x}\cdot\cos 5x+5e^{-2x}\cdot\sin 5x$. **51.** а) $\frac{2^{3x}}{3\ln 2}+C$; б) $\frac{4\cdot 3^{\frac{x}{4}}}{\ln 3}+C$; в) $2e^{2x}+C$; г) $-\frac{20}{\sqrt{e^x}}+C$. **52.** $\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^{-1}}-2}{\ln 3}$. **53.** а) 9; б) 27; в) 7.

54. а) 2; б) 2; в) 0,1; г) $\frac{7}{4}$; д) $\sqrt{10}$; $\frac{1}{\sqrt{10}}$; е) 5. **55.** а) $m>0$, $n>0$, и $m<n$; б) $m>0$, $n>0$ и $m<n$; в) $m>0$, $n>0$ и $m>n$. **56.** а) $0<a<1$; б) $0<a<1$; в) $a>1$. **57.** а) $\frac{1}{x\ln 2}$; б) $\frac{3}{x}$. **58.** а) $\ln 2$; б) $\frac{1}{2}\ln 5$. **59.** 1. **60.** а) 0; б) $2\operatorname{tg}^2 t$. **62.** а) Нечетная; б) четная; в) нечетная; г) нечетная.

64. а) $2\cos 5x$; б) $-2\sin 2x$; в) $3\cos 3x\cos 0{,}5x-0{,}5\sin 3x\sin 0{,}5x$; г) $-\frac{\cos^2 x-3\sin^2 x}{8\sin^2 x\cos^4 x}$. **65.** Да. **66.** а) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; б) $\pi+2\pi k$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $k, n\in\boldsymbol{Z}$; в) πk; $\operatorname{arctg} 2+\pi n$, $k, n\in\boldsymbol{Z}$; г) $-\operatorname{arctg}\frac{2}{5}+\pi k$; $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $k, n\in\boldsymbol{Z}$; д) $(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **67.** а) $\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi k$ и $\pi+2\pi n$, $k, n\in\boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n$, $k, n\in\boldsymbol{Z}$; в) $\frac{\pi}{2}+\pi k$ и $\operatorname{arctg} 4+\pi n$, $k, n\in\boldsymbol{Z}$; г) $(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; д) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $k, n\in\boldsymbol{Z}$; е) $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\operatorname{arctg} 3+\pi n$, $k, n\in\boldsymbol{Z}$; ж) $(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; з) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $k, n\in\boldsymbol{Z}$; и) $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\operatorname{arctg}(-3)+\pi n$; $k, n\in\boldsymbol{Z}$; к) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi n$, $k, n\in\boldsymbol{Z}$. **68.** а) $(0;\ -1)$; б) $(0;\ 1)$; в) $\left(-4;\ \frac{2}{3}\right)$; г) $\left(5;\ \frac{16}{5}\right)$; д) $(-4;\ -2)$; е) $(3;\ 6)$; ж) $\left(\frac{3}{2};\ -\frac{3}{2}\right)$; $(-2;\ 2)$; $(6;\ 2)$; $\left(-\frac{3}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$; з) $(3;\ 2)$, $(-3;\ -2)$; и) $(-4;\ -5)$; $(4;\ 5)$; $(-3\sqrt{3};\ -\sqrt{3})$; $(3\sqrt{3};\ \sqrt{3})$; k) $(3;\ 5)$; $(-3;\ -5)$; $\left(\frac{5}{3};\ \frac{13}{3}\right)$; $\left(-\frac{5}{3};\ -\frac{13}{3}\right)$; л) $(4;\ 9)$; м) $(4;\ 9)$. **69.** а) 81; б) 3; в) 3; г) $-\frac{1}{2}$; д) 1; $\sqrt[6]{3}$. **70.** а) $-\frac{1}{2}$; б) $-1{,}5$; в) $\frac{2}{\log_3 2}$; г) 0; 4; д) 3; е) $10^{\sqrt{2}}$; $10^{-\sqrt{2}}$. **71.** а) $(7;\ 3)$; б) $(5{,}5;\ 0{,}5)$; в) $(3;\ 1)$. **72.** а) $(10;\ 1000)$, $(1000;\ 10)$; в) $(4;\ 10)$, $(10;\ 4)$; г) $(3;\ 2)$. **73.** а) $-\frac{\pi}{3}+\pi k\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; б) $-\frac{2}{9}\pi+\frac{2}{3}\pi k\leqslant x\leqslant-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; в) $-\frac{7}{6}\pi+2\pi k\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; г) $-\frac{5}{6}\pi+2\pi k\leqslant x\leqslant-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; д) $-\frac{\pi}{6}+\pi k\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **74.** а) $x<\frac{3}{16}$; б) $5<x<7{,}5$; в) $x>-0{,}4$; г) $x<-0{,}05$; д) $1\frac{7}{24}<x<1\frac{1}{3}$; е) $-\frac{11}{19}<x<-\frac{2}{5}$; ж) $-5<x<\frac{4}{9}$; з) $1{,}42<x<1{,}5$;

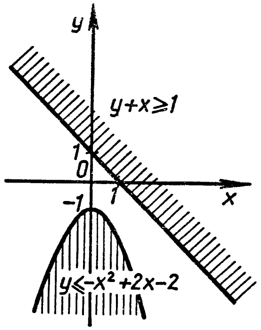


Рис. 410

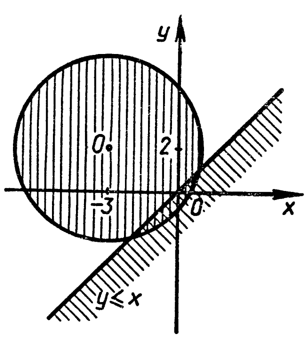


Рис. 411

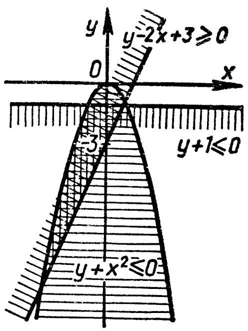


Рис. 412

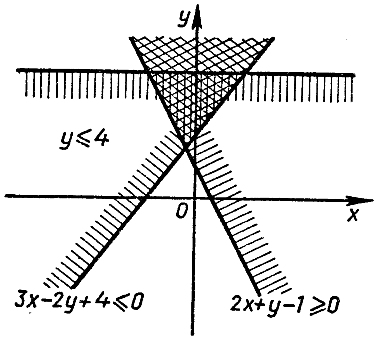


Рис. 413

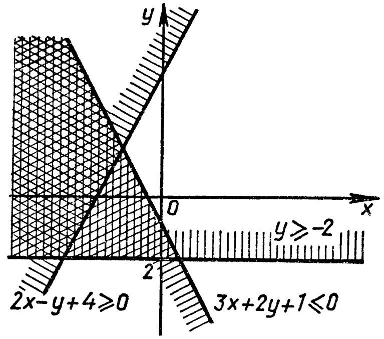


Рис. 414

и) $1 < x \leqslant 2$; к) $x \leqslant -2$; л) $3 < x \leqslant 3{,}5$; $x > 5$; м) $0{,}5 \leqslant x \leqslant 4$. **75.** а) Рис. 410; б) рис. 411; в) рис. 412; г) рис. 413; д) рис. 414. **76.** $\frac{a^2}{2}(2 - \operatorname{tg}\varphi)$. **77.** $16\sqrt{3}$. **78.** $\frac{9\sqrt{2}}{8}$. **79.** 4 дм^3. **80.** $2\sqrt{2}$. **81.** 2. **82.** $\sqrt{5}$. **83.** 1 м. **84.** 2. **85.** 4π.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Рациональные числа 3
§ 2. Иррациональные числа 8
§ 3. Действительные числа 12
§ 4. Некоторые числовые промежутки 16
§ 5. Повторение 19
§ 6. Задания для самопроверки 21

Глава II. БЕСКОНЕЧНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 7. Числовая последовательность, способы ее задания 22
§ 8. Предел последовательности 26
§ 9. Теоремы о пределах последовательностей 31
§ 10. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии 35
§ 11. Длина окружности. Число π 38
§ 12. Повторение 41
§ 13. Задания для самопроверки 44

Глава III. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНАЯ

§ 14. Понятие о пределе функции 46
§ 15. Понятие о непрерывности функции 49
§ 16. Основные теоремы о пределах 53
§ 17. Предел степенной функции с натуральным показателем 55
§ 18. Вычисление пределов рациональных функций . . . 56
§ 19. Понятие о приращении аргумента и приращении функции 59
§ 20. Скорость изменения функции 61
§ 21. Производная 66
§ 22.* Производная и непрерывность 70
§ 23. Производная алгебраической суммы, произведения и частного функций. Производная степенной функции 71
§ 24. Производная сложной функции 76
§ 25. Повторение 79
§ 26. Задания для самопроверки 81

Глава IV. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

§ 27*. Понятие о главной части приращения функции . . . 82
§ 28. Геометрический смысл производной 86
§ 29. Уравнение касательной к кривой 91
§ 30. Применение производной в физике 93
§ 31. Возрастание и убывание функции 95
§ 32. Максимум и минимум функции 100
§ 33. Исследование квадратичной функции 108
§ 34. Общая схема исследования функции и построение ее графика 113

§ 35. Наибольшее и наименьшее значения функции . . . 118
§ 36. Повторение 123
§ 37. Задания для самопроверки 125

Глава V. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ТОЖДЕСТВА

§ 38. Градусное измерение угловых величин 126
§ 39. Радианное измерение угловых величин 128
§ 40.* Длина дуги окружности 132
§ 41.* Площадь кругового сектора 133
§ 42. Тригонометрические функции числового аргумента 134
§ 43. Изменение тригонометрических функций с изменением аргумента 138
§ 44. Таблицы значений тригонометрических функций числового аргумента 142
§ 45. Решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств на промежутке от 0 до 2π 144
§ 46. Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента 147
§ 47. Понятие четной и нечетной функции 152
§ 48. Четность и нечетность тригонометрических функций 154
§ 49. Периодичность тригонометрических функций . . . 156
§ 50. Графики функций $\sin x$ и $\cos x$ 160
§ 51. Графики функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ 163
§ 52. Решение простейших тригонометрических уравнений на множестве действительных чисел 165
§ 53. Примеры решения тригонометрических уравнений 173
§ 54. Примеры решения тригонометрических неравенств 176
§ 55. Повторение 179
§ 56. Задания для самопроверки 181

Глава VI. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

§ 57. Векторы. Скалярное умножение векторов (повторение) 183
§ 58. Косинус суммы и косинус разности двух аргументов 184
§ 59. Синус суммы и синус разности двух аргументов . . . 186
§ 60. Тангенс суммы и тангенс разности двух аргументов 189
§ 61. Формулы приведения 191
§ 62. Тригонометрические функции двойного аргумента 195
§ 63. Тригонометрические функции половинного аргумента 197
§ 64*. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента 200
§ 65. Формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций 204
§ 66. Примеры решения однородных тригонометрических уравнений 206
§ 67. Повторение 208
§ 68. Задания для самопроверки 210

Глава VII. ПРОИЗВОДНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 69. Непрерывность тригонометрических функций . . . 211
§ 70. Предел отношения синуса к аргументу 212
§ 71. Производная синуса 216
§ 72. Производные косинуса, тангенса и котангенса . . . 218
§ 73. Понятие второй производной 220
§ 74*. Понятие о дифференциальном уравнении. Гармонические колебания 222
§ 75. Решение задач 227
§ 76. Повторение 231
§ 77. Задания для самопроверки 233

Глава VIII. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ, ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ, СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИИ И ИХ ПРОИЗВОДНЫЕ

§ 78. Степень с действительным показателем 234
§ 79. Показательная функция, ее свойства и график . . . 238
§ 80. Примеры решения показательных уравнений . . . 242
§ 81. Примеры решения показательных неравенств . . . 246
§ 82. Производная показательной функции 249
§ 83. Логарифмическая функция 251
§ 84*. Основные свойства логарифмов 254
§ 85*. Примеры вычислений с помощью логарифмов . . . 258
§ 86. Примеры решения логарифмических уравнений . . 264
§ 87. Примеры решения логарифмических неравенств 268
§ 88. Производная логарифмической функции 271
§ 89. Степенная функция и ее производная 274
§ 90. Повторение 277
§ 91. Задания для самопроверки 283

Глава IX. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

§ 92. Понятие первообразной функции 284
§ 93. Основное свойство первообразной функции 287
§ 94. Три правила нахождения первообразных 290
§ 95. Криволинейная трапеция и ее площадь 292
§ 96. Вычисление площади криволинейной трапеции . . . 297
§ 97. Понятие интеграла 298
§ 98. Формула Ньютона—Лейбница 302
§ 99. Применение интеграла к решению задач 304
§ 100. Повторение 308
§ 101. Задания для самопроверки 311

Глава X. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

§ 102. Понятие о равносильных уравнениях 312
§ 103. Примеры решения иррациональных уравнений . . . 318
§ 104. Уравнения с двумя и тремя переменными 321
§ 105. Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными 324
§ 106. Примеры решения систем линейных уравнений методом последовательного исключения переменных . . 332
§ 107. Некоторые способы решения нелинейных систем уравнений 336
§ 108. Примеры решения неравенств и систем неравенств с двумя переменными 346
§ 109. Повторение 351
§ 110. Задания для самопроверки 354

Глава XI. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ 355
Справочный раздел 365
Ответы и указания к упражнениям 374

Григорий Давыдович Глейзер
Самвел Манасович Саакян
Инна Георгиевна Вяльцева
Анатолий Степанович Алексеев

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Учебное пособие для 9—11 классов
вечерней (сменной) школы

Зав. редакцией *Р. А. Хабиб*
Редактор *Л. М. Котова*
Художник *Б. Л. Николаев*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технические редакторы *В. Ф. Коскина, С. Н. Терехова*
Корректоры *Н. В. Красильникова, Н. С. Соболева*
ИБ № 9321

Подписано к печати с диапозитивов 28.11.85. Формат $60 \times 90^{1}/_{16}$. Бум. кн-журн. отеч. Гарнит. литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 26+форзац 0,25. Усл. кр. отт. 26,69. Уч.-изд. л. 25,24+форзац 0,42. Тираж 305 000 экз. Заказ 252.
Цена 60 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
129846. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

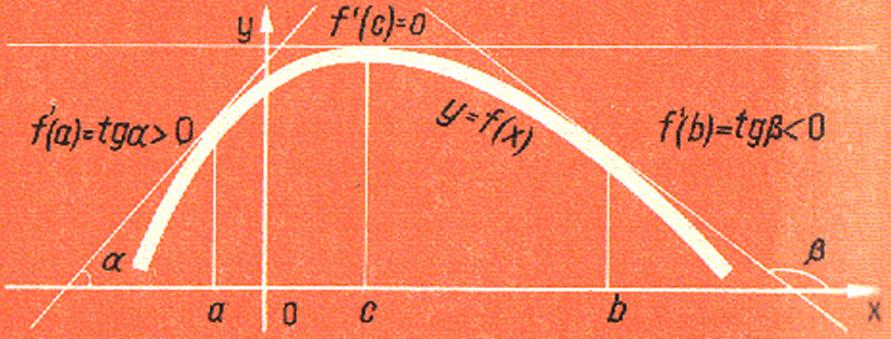
Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИЙ

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

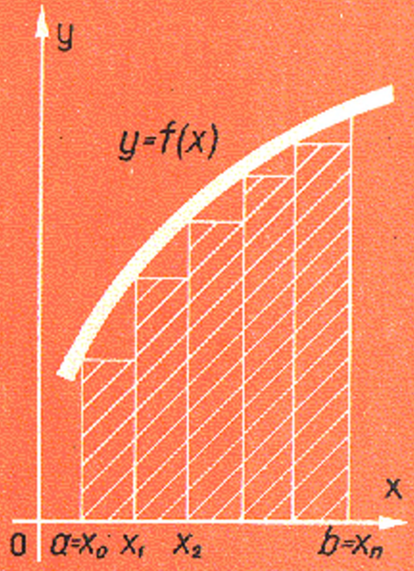
ФУНКЦИЯ	ПРОИЗВОДНАЯ
c	0
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$
a^{x}	$a^{x}\ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

ФУНКЦИЯ	ПРОИЗВОДНАЯ
cu	cu'
$u\pm v$	$u'\pm v'$
$u\cdot v$	$u'v+v'u$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$
$u(v),\ v(x)$	$u'_x=u'_v\cdot v'_x$

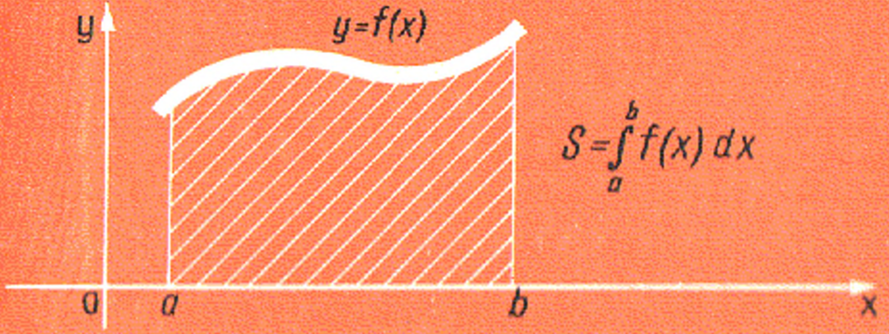

y
$f'(c)=0$
$f'(a)=\operatorname{tg}\alpha>0$
$y=f(x)$
$f'(b)=\operatorname{tg}\beta<0$
α
β
a
0
c
b
x

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a),\qquad F'(x)=f(x)$$

ФУНКЦИЯ	ПЕРВООБРАЗНАЯ
$x^{\alpha},\ \alpha\neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
a^{x}	$\frac{a^{x}}{\ln a}+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$
$\sin x$	$-\cos x+C$
$\cos x$	$\sin x+C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x+C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x+C$


y
$y=f(x)$
x
0
$a=x_0$
x_1
x_2
$b=x_n$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)\,dx$$



$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

Школьные учебники СССР

SHEBA.SPB.RU/SHKOLA